ORGANIZADORAS

Leandra dos Santos • Lahis Braga Souza • Sueli Liberatti Javaroni

Possibilidades do GeoGebra nas aulas de Matemática da Educação Básica

Possibilidades do GeoGebra nas aulas de Matemática da Educação Básica

canal6 editora
Rua José Pereira Guedes, 7-14
Pq. Paulista, Bauru, SP - CEP 17031-420
Fone/fax (14) 3313-7968 | www.canal6editora.com.br

Catalogação na Publicação (CIP)
(BENITEZ Catalogação Ass. Editorial, MS, Brasil)

P889
1.ed.

Possibilidades do GeoGebra nas aulas de Matemática da Educação Básica [livro eletrônico] / organizadoras Leandra dos Santos, Lahis Braga Souza, Sueli Liberatti Javaroni. – 1.ed. – Bauru, SP: Canal 6, 2022.
3 Mb ; PDF

Bibliografia
ISBN 978-85-7917-561-9 (e-book)

1. Educação básica. 2. Geogebra – Estudo e ensino. 3. Matemática. I. Santos, Leandra dos. II. Souza, Lahis Braga. III. Javaroni, Sueli Liberatti.

03-2022/161 CDD 510,7

Índice para catálogo sistemático:
1. Geogebra : Matemática : Estudo e ensino 510.7

Bibliotecária : Aline Graziele Benitez CRB-1/3129

ORGANIZADORAS
Leandra dos Santos • Lahis Braga Souza • Sueli Liberatti Javaroni

Possibilidades do GeoGebra nas aulas de Matemática da Educação Básica

1ª Edição 2022
Bauru, SP
canal6 editora

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de registrar nossos agradecimentos a todos os colaboradores do projeto “Mapeamento do uso de tecnologias da informação nas aulas de Matemática no Estado de São Paulo”, em particular à Maria Francisca da Cunha, Maria Teresa Zampieri, Sandro Ricardo Pinto da Silva e Tiago Giorgetti Chinellato que nos ajudaram no decorrer da organização deste livro.

Agradecemos ao Programa Observatório da Educação (OBEDUC), da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), entidade do Governo Brasileiro voltado para a formação de recursos humanos, pelo apoio financeiro ao projeto mencionado, que possibilitou o desenvolvimento das pesquisas realizadas, a partir das quais emergiram as primeiras versões das atividades apresentadas neste trabalho.

Agradecemos ao Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) pelo suporte teórico e metodológico no desenvolvimento do projeto e das pesquisas supracitadas.

Agradecemos ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), campus Rio Claro, pelo apoio financeiro para editoração deste livro.

Por fim, agradecemos ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) do Conselho Nacional de

Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento da pesquisa de iniciação científica de Leandra dos Santos, chamada PIBIC/PIBITI 2017/2018, número 800571/2016-9, que possibilitou o desenvolvimento dos materiais que constituem esta obra.

AS ORGANIZADORAS

Leandra dos Santos é Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho" e Mestra em Educação Matemática pela mesma instituição. Atua na Educação Básica pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, lecionando disciplinas de conteúdos matemáticos.

Lahis Braga Souza é Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa (UFV), Mestra em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho" e Doutora em Educação Matemática por essa mesma instituição.

Sueli Liberatti Javaroni é Bacharel em Matemática pela Universidade de São Paulo, Mestra em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos e Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho". Atua em cursos de graduação e pós-graduação da Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho".

AUTORES

Leandra dos Santos é Licencianda em Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho" e Mestra em Educação Matemática pela mesma instituição. Atua na Educação Básica pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, lecionando disciplinas de conteúdos matemáticos.

Lahis Braga Souza é Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa (UFV), Mestra em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho" e Doutora em Educação Matemática por essa mesma instituição.

Maria Teresa Zampieri é Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos, Mestra em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" e Doutora em Educação Matemática por essa mesma instituição. Pós-Doutora pelo Programa Nacional de Pós-Doutorado (PNPD/CAPES), vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, campus de Rio Claro e, atualmente, realiza pós-doutorado na Universidade Federal de São Carlos.

Tiago Giorgetti Chinellato é Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de São João Del-Rei, Mestre e Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", campus de Rio Claro. Atualmente atua no

Ensino Médio e no Ensino Superior, lecionando disciplinas de conteúdos matemáticos.

Marcela Souza Silva é Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho", licenciada em Matemática e Mestre em Educação Matemática pela mesma instituição. Atualmente atua na Educação Básica, lecionando Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental.

Sueli Liberatti Javaroni é Bacharel em Matemática pela Universidade de São Paulo, Mestra em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos e Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho". Atua em cursos de graduação e pós-graduação da Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho".

APRESENTAÇÃO

Esse livro é um dos produtos do projeto temático "Mapeamento do uso de tecnologias da informação nas aulas de Matemática no Estado de São Paulo", aprovado sob nº 16429 no Edital 049/2012/CAPES/OBEDUC/INEP e financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), entidade do Governo Brasileiro voltada para a formação de recursos humanos. O referido projeto foi vinculado ao Programa Observatório da Educação (OBEDUC) e coordenado pela Professora Doutora Sueli Liberatti Javaroni, vigente no período de 2013 a 2017. Tal projeto teve por objetivo desenvolver um estudo acerca da presença e do uso das tecnologias digitais nas aulas de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, em particular do computador nas aulas de Matemática da Educação Básica (JAVARONI; ZAMPIERI, 2019).

Com isso, pesquisas foram feitas em seis Diretorias de Ensino do Estado de São Paulo, a saber: Bauru, Guaratinguetá, Limeira, Presidente Prudente, Registro e São José do Rio Preto. Tais diretorias abrangem um total de setenta e cinco cidades do estado e a escolha delas se deu considerando que cada uma tem sob sua jurisdição uma cidade que possui campus da Universidade Estadual Paulista.

Nessas Diretorias de Ensino, pesquisas realizadas e conversas com Professores Coordenadores do Núcleo Pedagógico de Matemática evidenciaram a pouca utilização das tecnologias digitais nas aulas de matemática das escolas de Educação Básica, o que indicou a necessidade da realização de formações continuadas para os professores desse segmento de ensino a respeito do uso dessas tecnologias (CHINELATTO, 2014; OLIVEIRA, 2014; PERALTA, 2015), mais especificamente voltadas para o uso do software GeoGebra[1]. Com base nesses resultados, foram realizadas outras investigações que proporcionaram cursos de formação continuada aos professores de Matemática, a saber, a de Maria Teresa Zampieri, Lahis Braga Souza, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria e Tiago Giorgetti Chinellato, voltados para o uso do GeoGebra em aulas do referido componente curricular[2].

Para tais cursos, foram elaboradas atividades com esse software em parceria com colaboradores do projeto temático. As atividades, frutos das pesquisas desenvolvidas, foram planejadas estando articuladas aos conteúdos propostos no Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) vigente na época, e até mesmo baseadas nos materiais curriculares oficiais, a saber o Caderno do Aluno e o Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2014a).

Posteriormente, foi desenvolvida uma pesquisa de iniciação científica por Leandra dos Santos (SANTOS, JAVARONI, 2020), finalizando o projeto em questão no ano de 2017. Nela, as atividades produzidas para os cursos realizados nas pesquisas de Zampieri (2018), Souza (2016) e Chinellato (2019) foram aperfeiçoadas, resultando nos roteiros escritos e audiovisuais

---

1 GEOGEBRA. GeoGebra - **Aplicativos Matemáticos**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 19 jul. 2021.

2 O GeoGebra é um software livre, de matemática dinâmica, que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino. Ele reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. Ainda, conta com um conjunto de atividades diversas disponíveis em sua plataforma digital de materiais (GEOGEBRA, 2021).

de construção no GeoGebra Classic 5, versão 5.0 (GEOGEBRA, 2021), bem como nas sugestões de abordagem apresentadas neste livro, de modo que essas últimas também emergiram dos materiais curriculares do Estado de São Paulo mencionados.

Ainda, tendo em vista a vigência da atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), as atividades foram associadas a uma ou mais habilidades preconizadas no documento, que podem ser exploradas em cada proposta e contempladas da melhor forma com as passíveis adaptações. Em outras palavras, de todo modo, fica um convite a cada leitor para que reflita sobre as atividades e as adaptem de acordo com a BNCC, tendo em vista, também, as especificidades dos contextos em que lecionam, podendo contemplar habilidades diferentes das sugeridas.

Dessa forma, este livro tem o propósito de apresentar possibilidades do uso do software GeoGebra nas aulas de Matemática da Educação Básica, sugerindo atividades matemáticas a fim de auxiliar professores no desenvolvimento e abordagem delas em suas práticas. Cabe ressaltar que uma atividade pode ser trabalhada em diferentes séries/anos da Educação Básica, sendo passíveis de serem adaptadas em conformidade com a intencionalidade e objetivo dos docentes.

SUMÁRIO

1. PERÍMETRO DO RETÂNGULO

Objetivo: Oportunizar aos estudantes que identifiquem e classifiquem formas planas, mais especificamente o quadrado e o retângulo, e reconheçam a relação entre as medidas dos lados e o perímetro dessas figuras.

Habilidade da BNCC associada:

"**(EF06MA29)**[3] Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área" (BRASIL, 2018, p. 103).

3 Para a leitura do código, é relevante mencionar que, conforme a BNCC: o primeiro par de letras indica a etapa escolar; o primeiro par de números representa o respectivo ano escolar; a segunda sequência de letras corresponde ao componente curricular ou área do conhecimento; o primeiro número após a segunda sequência de letras indica a competência específica que abrange a habilidade; os números restantes consistem na numeração da habilidade no seu respectivo conjunto determinado por cada competência (BRASIL, 2018). Neste caso, a habilidade EF06MA29 é voltada para o Ensino Fundamental (EF), em particular para o sexto ano (06), e se refere ao componente curricular Matemática (MA), à segunda competência específica (2), e é a habilidade número nove (9) dentre as elencadas nessa competência.

Roteiro de Construção

1. Clique com o botão direito do mouse sobre a Janela de Visualização e desmarque a opção Eixos para ocultá-los.
2. Selecione a ferramenta *Reta* e clique em dois pontos, posicionando-os horizontalmente sobre os pontos da malha, criando os pontos A e B.
3. Selecione a ferramenta *Ponto* e clique em qualquer lugar na Janela de Visualização, preferencialmente coincidindo com alguma linha horizontal da malha, criando o ponto C.
4. Selecione *Reta Paralela* e clique na reta e depois no ponto criado anteriormente.
5. Selecione *Reta Perpendicular*, clique sobre a reta definida pelos pontos A e B e sobre o ponto A. Faça o mesmo, agora clicando sobre o ponto B.
6. Selecione a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* e clique na reta perpendicular que passa por A e na reta paralela em que se encontra o ponto C. Marque também a interseção da reta perpendicular que passa por B com a reta que passa por C.
7. Selecione a ferramenta *Polígono* e clique nos pontos A, B, E, D e, por fim, em A, vértice inicial do polígono.
8. Selecione a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro* e meça os lados AB, BE, ED e DA clicando nos respectivos segmentos de reta, a, b, e e d, lados do retângulo.
9. Na Janela de Álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre Reta e desmarque a opção Exibir Objeto.
10. Ainda nessa janela, desmarque o ponto C para ocultá-lo.
11. Clique em Exibir, na Barra de Ferramentas, e selecione Planilha.
12. Nas células A1, B1, C1 e D1 digite, respectivamente, “Lado a”, “Lado b”, “Lado e”, “Lado d”.
13. Em E1, digite “Perímetro”.

14. Na linha 2, digite apenas o nome dos respectivos lados: em A2, digite “a”; em B2, “b”; em C2, “e” e em D2, digite “d”. Serão exibidas, em cada célula, as medidas dos lados.
15. Em E2, digite “Soma[A2:D2]”(ou clique no canto superior esquerdo no somatório e selecione as células de A1 até D1), e então a planilha fará o cálculo do perímetro do retângulo.
16. Selecione *Mover*, movimente os vértices A e B do retângulo e observe as variações nas medidas da planilha.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:
https://youtu.be/eXeK1UHVTiQ

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) O que acontece com a medida do perímetro, quando movimentamos o segmento AB para mais perto de DE? E o que acontece com as medidas de AD e BE?
2) Movimentando os pontos e segmentos, existe a possibilidade de deixarmos todas as medidas de AB, BE, ED e AD iguais? Tente com a malha oculta ou usando o ponto C, que deve ser exibido. Como essa nova figura se chama? Quais são as principais características dela?
3) A partir desses movimentos, podemos afirmar que todo quadrado é um retângulo? Justifique tomando como base sua visualização. É possível afirmar que todo retângulo é quadrado? Justifique.

2. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Objetivo: Oportunizar aos estudantes que explorem e compreendam os casos de semelhança de triângulos.

Habilidades da BNCC associadas:

"(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 303).

"(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes" (BRASIL, 2018, p. 317).

Roteiro de Construção

Caso 1: A.A.

4. Na Janela de Visualização, clique com o botão direito do mouse e desmarque as opções Eixos e Malha.
5. Com a ferramenta *Texto*, clique preferencialmente na parte inferior ou superior da Janela de Visualização, e digite: "Caso A. A.".
6. Com a ferramenta *Polígono*, faça um triângulo clicando sobre três pontos na Janela de Visualização e, por último, no ponto inicial, criando os pontos A, B e C.

7. Com a ferramenta *Ponto*, crie um ponto D fora do polígono.
8. Em seguida, utilizando a ferramenta *Homotetia*, clique sobre o triângulo, sobre o ponto D, centro da homotetia, e digite “2” para razão.
9. Selecione Ângulo e clique sobre dois segmentos, lados do triângulo, no sentido anti-horário para exibir o ângulo entre eles. Faça o mesmo nos segmentos correspondentes na figura ampliada. Analogamente, insira outro ângulo na figura original e na ampliada.

Caso 2: L.A.L.

10. Se for necessário, desloque a Janela de Visualização usando *Mover* para outra construção e insira o Texto “Caso L.A.L.”
11. Crie outro triângulo qualquer com a ferramenta *Polígono*.
12. Insira um *Ponto* fora do triângulo.
13. Mais uma vez, usando *Homotetia*, clique no triângulo, no ponto fora dele e digite “2” para o fator de ampliação.
14. Depois, no triângulo original, marque as medidas de dois segmentos usando *Distância Comprimento ou Perímetro* e do ângulo entre eles, clicando no sentido anti-horário com a ferramenta *Ângulo*. Faça o mesmo para os lados e ângulos correspondentes do triângulo criado por homotetia.

Caso 3: L.L.L.

15. Se for necessário, desloque novamente a Janela de Visualização e insira o Texto “Caso LLL”.
16. Crie um triângulo.
17. Crie um *Ponto* fora do polígono.

18. Com a ferramenta *Homotetia*, amplie o triângulo na razão 2.
19. Depois, no triângulo original, marque as medidas dos três segmentos, lados do polígono, usando *Distância Comprimento ou Perímetro*. Faça o mesmo para os lados correspondentes do triângulo criado por homotetia.

Observação: Use a ferramenta *Mover* para organizar os textos e movimentar os centros da homotetia e os vértices dos triângulos originais.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/YliDW86-UVk

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Manipulando as figuras, o que você observa em relação às medidas dos ângulos exibidas em cada caso de semelhança, comparando as figuras originais com as ampliadas?
2) Exiba os outros ângulos e a medida dos segmentos em cada caso. O que é possível afirmar?
3) Utilizando o GeoGebra, construa, em cada caso de semelhança, dois triângulos que satisfaçam as condições apresentadas em cada caso.

3. DIFERENTES TIPOS DE TRIÂNGULO COM MESMA ÁREA

Objetivo: Possibilitar a investigação pelos alunos do cálculo de área de um triângulo qualquer a partir de diferentes tipos de triângulos com mesma área.

Habilidades da BNCC associadas:

“(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica” (BRASIL, 2018, p. 309).

“(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros” (BRASIL, 2018, p. 309).

Roteiro de Construção

1. Clique com o botão direito do mouse sobre a Janela de Visualização e desmarque as opções Eixos e Malha.
2. Construa uma *Reta* horizontal f, criando os pontos A e B.
3. Construa, com a ferramenta *Reta Paralela*, uma reta g paralela a reta f, criando o ponto C.
4. Usando a ferramenta *Ponto***,** crie os pontos D e E sobre a reta g.
5. Com a ferramenta *Polígono*, construa os triângulos ABD e ABE.

6. Com a ferramenta *Área***,** calcule a área do triângulo ABD e ABE clicando sobre eles.
7. Usando *Ângulo*, clique mais uma vez sobre cada um dos triângulos.

Observação: Use *Mover* para movimentar a reta paralela a g, os vértices dos triângulos e, se for necessário, a posição dos valores dos ângulos para facilitar a visualização.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/kUKjslDDTIk

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Movimente os pontos D e E, e descreva o que acontece com as medidas das áreas desses triângulos. Por que isso acontece?
2) Que cálculo foi feito para obter esses resultados? Discuta com seus colegas e elaborem uma expressão que descreva esse cálculo.
3) Quanto vale a soma de todos os ângulos internos? Use o campo Entrada.
4) Com a ferramenta *Mover*, mova o ponto E. O que acontece com a soma dos ângulos internos do triângulo ABE?

4. CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Objetivo: Oportunizar aos alunos que estabeleçam a compreensão sobre as relações entre os lados de um triângulo, as quais fornecem as condições de sua existência.

Habilidades da BNCC associadas:

"(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°" (BRASIL, 2018, p. 309).

"(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos" (BRASIL, 2018, p. 303).

"(EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados" (BRASIL, 2018, p. 309).

Roteiro de Construção

1. Esconda os Eixos e a Malha.
2. Crie um *Controle Deslizante* a, variando de 0 a 30, com incremento 1.

3. Crie outros controles deslizantes b e c, com as mesmas características de a.
4. Selecione *Mover* e altere a cor de cada um dos controles clicando com o botão direito do mouse em Propriedades, Cor, ou pelo atalho na Janela de Visualização.
5. Em seguida, com a ferramenta *Círculo Dados Centro e Raio*, crie um círculo com centro A qualquer e raio a, clicando sobre a Janela de Visualização.
6. Crie um *Ponto* B na circunferência, clicando sobre ela.
7. Com a ferramenta *Segmento*, crie o segmento AB.
8. Altere a cor do segmento para que corresponda com a cor do controle a usando *Mover.*
9. Esconda esse círculo desmarcando a cônica pela Janela de Álgebra.
10. Em seguida, crie um círculo com centro em B e raio c, usando *Círculo Dados Centro e Raio.*
11. Com a mesma ferramenta, crie um círculo com centro em A e raio b.
12. Usando *Ponto*, marque uma das interseções entre esses círculos.

    Observação: Se não houver interseção entre as circunferências, altere os valores dos controles deslizantes usando *Mover* até que seja possível criar o ponto.

13. Usando *Segmento*, una esse ponto de interseção às extremidades A e B, criando mais dois segmentos.
14. No segmento que liga B ao ponto de interseção, coloque a cor do controle deslizante c. E no segmento que liga A ao ponto de interseção, coloque a cor do controle deslizante b.
15. Oculte o rótulo dos segmentos e dos pontos pela Janela de Álgebra, clicando com o botão direito do mouse sobre Ponto e Segmento, desmarcando Exibir Rótulo.
16. Esconda os círculos, desmarcando as cônicas exibidas.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/0-RSUl0M_lw

Sugestão de questão a ser explorada a partir da atividade:

Manipule as medidas nos controles deslizantes e conjecture o que acontece. Escreva as relações que observa, se atentando aos valores das medidas dos lados que inviabilizam a existência do triângulo e aos valores que viabilizam essa existência. Argumente com os colegas sobre suas constatações.

5. PARALELEPÍPEDO OBLÍQUO E RETO-RETÂNGULO

Atividade baseada no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014b).

Objetivo: Explorar com os alunos as diferenças entre dois tipos de paralelepípedo, podendo ser abordados os conceitos de área, volume e perímetro.

Habilidades da BNCC associadas:

"(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos" (BRASIL, 2018, p. 283).

"(EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas" (BRASIL, 2018, p. 314).

"(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais." (BRASIL, 2018, p. 537).

Roteiro de Construção

1. Com a ferramenta *Polígono*, crie um retângulo na Janela de Álgebra de lados de medidas 6 e 12. Como sugestão, clique sobre as coordenadas (0,0), (0,6), (12,6) (12,0) e sobre o ponto inicial, com o auxílio da Malha, criando os vértices A, B, C e D, respectivamente.
2. De forma análoga, crie outro retângulo EFGH com as mesmas medidas, preferencialmente clicando nas coordenadas (0,-6), (0,-12), (12,-12) e (12,-6), vértices E, F, G e H, respectivamente.
3. Clique em Exibir, Janela de Visualização 3D, feche a Janela de Visualização e, na Janela de Visualização 3D, clique com o botão direito do mouse e desmarque a opção Eixos para ocultá-los.

Paralelepípedo Oblíquo:

4. Usando *Ponto em Objeto*, crie um ponto I sobre o plano na Janela de Visualização 3D fora dos retângulos, preferencialmente próximo do ponto A ou B.
   Observação: Se for necessário, gire a Janela de Visualização 3D usando *Girar Janela de Visualização 3D.*
5. Selecione *Reta Perpendicular*, clique sobre o plano na Janela de Visualização 3D e sobre o ponto criado anteriormente.
6. Selecione *Prisma*, clique sobre o retângulo ABCD na Janela de Visualização 3D e sobre a reta perpendicular que passa por I, criando o ponto M.
7. Selecione Ângulo e clique sobre os pontos M, A e B.
8. Selecione *Distância, Comprimento ou Perímetro,* clique sobre os segmentos AB, AM e AD.

Paralelepípedo Reto-Retângulo:

9. Selecione *Extrusão para Prisma ou Cilindro*, clique sobre o retângulo EFGH e defina “6” para altura.
10. Selecione *Distância, Comprimento ou Perímetro*, clique sobre os segmentos FE, FO e FG.
11. Na Barra de Ferramentas, clique em Opções, Arredondamento e selecione 0 Casas Decimais.

Observação: Movimente, usando *Mover*, os pontos I e M para alterar, respectivamente, a inclinação e a altura do prisma oblíquo.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/rOp67U5ynlk

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

Movimente os pontos I e M de modo que o segmento AM tenha comprimento 6 e o ângulo exibido de uma das faces laterais meça 120°.

1) O que podemos concluir sobre o volume dos dois paralelepípedos?
2) Qual a área dos dois sólidos? E quais são as formas geométricas que as compõem?
3) O perímetro de cada uma das figuras vale quanto?

6. O NÚMERO π

Atividade baseada no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014c).

Objetivo: Possibilitar que os alunos identifiquem a razão constante π em diferentes circunferências.

Habilidade da BNCC associada:

"(EF07MA33) Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica" (BRASIL, 2018, p. 309).

Roteiro de Construção

1. Na Janela de Visualização, clique com o direito do mouse e desmarque as opções Eixos e Malha.
2. Selecione *Controle Deslizante* e crie o controle de nome "Raio", marque a opção Inteiro, min: "1", max: "30", Incremento: "0.5".
3. Selecione *Círculo dados Centro e Raio*, clique sobre a Janela de Visualização, criando o centro A da circunferência, raio "Raio".
4. Selecione *Ponto* e crie os pontos B e C sobre a circunferência.
5. Crie o *Segmento* de extremidades A e B e renomei-o para R.

6. Selecione *Reta*, clique sobre os pontos A e C.
7. Selecione *Ponto* e marque a outra interseção da reta com a circunferência, criando o ponto D.
8. Crie o *Segmento* de extremidades D e C e renomei-o para Diâmetro.
9. Na Janela de Álgebra, desmarque a reta para ocultá-la.
10. Oculte o rótulo da circunferência e dos pontos.
11. Selecione *Distância, Comprimento ou Perímetro*, clique sobre a circunferência, R e Diâmetro.
12. Dê dois cliques sobre o texto da circunferência e apague "de c", deixando apenas Circunferência = valor.
13. Se desejar, altere as cores da circunferência, do Diâmetro e de R, que corresponda com a cor do controle deslizante.
14. No campo Entrada, digite "perímetroc/Diâmetro", inserindo o número a.

Inserindo texto:

Exemplo: $\frac{Circunferência}{Diâmetro} = \frac{12.57}{4} = \pi$

- Selecione *Texto.*
- Habilite Fórmula LaTex, selecione Fração, altere a e b para Circunferência e Diâmetro.
- Insira "=" e outra fração.
- Altere a selecionando o Objeto perímetroc, e altere b selecionando o Objeto Diâmetro.
- Insira "=" e, em Objeto, selecione o número a, que corresponde à razão.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/m0J4pctwoEc

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) O que você observa ao dividir o comprimento da circunferência pelo diâmetro?
2) O que acontece com essa razão quando o raio varia?

7. SIMETRIA/REFLEXÃO

Objetivo: Explorar com os alunos o conceito de Simetria da Reflexão.

Habilidades da BNCC associadas:

"(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria" (BRASIL, 2018, p. 293).

"(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem" (BRASIL, 2018, p. 309).

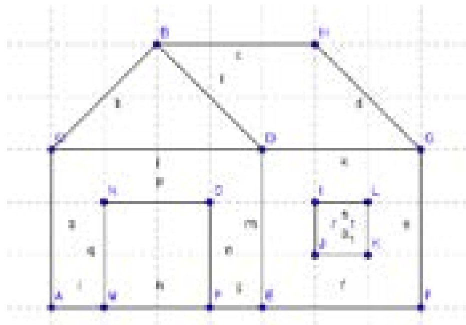
"(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros" (BRASIL, 2018, p. 309).

Roteiro de Construção

1. Exiba Malha e Eixos.
2. Clique com o botão direito do mouse sobre a Janela de Visualização, Janela de Visualização, Malha, marque a

opção Distância e altere para x: “1” e y: “1”. Faça o mesmo nas abas EixoX e EixoY, selecionando 1 em Distância.

3. Faça um desenho de sua preferência com a ferramenta *Ponto*, usando os pontos da malha, e trace os contornos usando *Segmento*, como a figura a seguir.



4. Marque os pontos que considerar simétricos aos pontos dados em relação ao eixo y usando *Ponto*.
5. Usando a ferramenta *Segmento*, forme uma segunda figura com os pontos simétricos marcados no item anterior.
6. Na Janela de Álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre Segmento e desmarque a opção Exibir Rótulo.
7. Use a ferramenta *Polígono*, clique nos pontos extremos dos segmentos que contornam a figura criada inicialmente e, em seguida, use a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta* para verificar se a figura é simétrica.

   Observação: Se desejar, selecione toda a figura com o mouse para usar a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta*, refletindo, além do polígono, os pontos e segmentos, que devem ser coincidentes com os criados na figura simétrica.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/UoBYwevuj-k

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Podemos dizer que essas duas figuras são simétricas? Por quê? Em relação a qual referência?
   Verifique clicando sobre o polígono com a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta* e, em seguida, sobre o eixo y.
2) Marque pontos simétricos em relação ao eixo x e verifique se estão corretos.

8. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO QUALQUER

Objetivo: Oportunizar aos estudantes que investiguem e compreendam que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180º e explorar ângulos em retas transversais que cortam um feixe de retas paralelas.

Habilidades da BNCC associadas:

“(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica” (BRASIL, 2018, p. 308).

“(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°” (BRASIL, 2018, p. 309).

Roteiro de Construção

1. Oculte os Eixos e a Malha.
2. Construa uma *Reta* horizontal, passando pelos pontos A e B quaisquer.
3. Crie um *Ponto* C tal que C não pertença à reta AB e esteja na parte superior a reta AB.

4. Trace uma *Reta Paralela* a reta AB passando pelo ponto C.
5. Trace uma *Reta* que passe por A e C.
6. Marque nesta reta, na parte superior a C, um *Ponto* D e, na parte inferior a A, marque o ponto E.
7. Trace uma *Reta* que passe por B e C.
8. Marque um *Ponto* F na reta paralela que passa por C à esquerda desse ponto e um ponto G à direita do ponto C.
9. Marque um *Ponto* H na reta AB à esquerda do ponto A e o ponto I à direita do ponto B, também sobre a reta AB.
10. Crie o triângulo ABC com a ferramenta *Polígono*.
11. Selecione Ângulo e clique sobre o triângulo.

Observação: Use *Mover* para movimentar os vértices.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/gKf0T2Wlc1E

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Com a ferramenta ângulo, meça o ângulo BCG e FCA, clicando sobre esses pontos respectivamente.
   a) O que pode observar em relação aos ângulos já destacados?

b) Qual a soma dos ângulos FCA, ACB e BCG? Use o campo entrada.

c) Qual a soma dos ângulos internos deste triângulo?

d) Mova os pontos. O que observa em relação a soma dos ângulos internos do triângulo?

2) Com a ferramenta ângulo calcule os ângulos abaixo e escreva como são classificados:

a) BCG e CBA

b) GCD e BAC

c) GCD e HAE

d) HAE e CAB

e) GCD e EAB

f) EAB e CAB

3) Movimente os pontos. O que ocorre com os ângulos das alternativas anteriores? A classificação muda?

9. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO CONVEXO QUALQUER

Objetivo: Proporcionar aos alunos conjecturar e validar a relação para cálculo da soma dos ângulos internos de um polígono qualquer.

Habilidade da BNCC associada:

"(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos" (BRASIL, 2018, p. 309).

Roteiro de Construção

1. Oculte os Eixos e a Malha.
2. Na Barra de Ferramentas, clique em Exibir, Planilha.
3. Na célula A1, digite "Polígono".
4. Na célula A2, digite "Lados". Nessa linha serão inseridas a quantidade de lados de cada polígono.
5. Na célula A3, digite "Triângulo". Essa linha será preenchida com o número de triângulos formados a partir de um vértice.

6. Na célula A4, digite "Ângulos internos". Nessa linha será inserida a soma dos ângulos internos de cada polígono.
7. Nas colunas B, C, D e E, digite "Triângulo", "Quadrilátero", "Pentágono" e "Polígono de n lados", respectivamente.
   A tabela ficará da seguinte forma:

Polígono	Triângulo	Quadrilátero	Pentágono	Polígono n lados
Lados				
Triângulos				
Ângulos internos				

8. Clique sobre a Janela de Visualização, selecione *Polígono* e crie um triângulo, um quadrilátero e um pentágono quaisquer.

Para preencher a tabela:

1. Para preencher a linha Triângulos, selecione *Segmento* e crie os triângulos dentro dos polígonos, unindo um único vértice aos outros possíveis. Se desejar, clique com o botão direito do mouse sobre *Segmento* na Janela de Álgebra e desmarque a opção Exibir Rótulo.
2. Para exibir os ângulos internos dos polígonos, selecione Ângulo e clique sobre eles.
3. Para somar os ângulos, use o campo Entrada, digitando o nome de cada um deles na soma, criando um número na Janela de Álgebra, representado por uma letra que deverá ser digitada na tabela, no seu respectivo polígono. Exemplo: $\alpha+\beta+\gamma$.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/xONUr-vNeBk

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

4) Preencha a tabela com os dados observados.
5) Depois da construção, movimente os vértices dos polígonos usando *Mover* e relate o que acontece com as somas de seus ângulos internos.
6) Sem fazer contas e sem fazer construções, você saberia calcular a soma dos ângulos internos de um polígono de 11 lados? E de um polígono de N lados? Discuta com colegas e explique sua conclusão.

10. SISTEMAS LINEARES

Atividade baseada no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014d).

Objetivo: Oportunizar aos estudantes a exploração e a resolução de sistemas lineares, geometricamente.

Habilidades da BNCC associadas:

"(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano" (BRASIL, 2018, p. 313).

"(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso" (BRASIL, 2018, p.312).

"(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais" (BRASIL, 2018, p. 536).

Roteiro de Construção

1. No campo Entrada, digite a equação de reta "x+y = 6", criando a reta f, e "x-y = 1" para criar a reta g.
2. Na Barra de Ferramentas, clique em Exibir, Planilha.
3. Na célula A1, digite "f" para inserir a equação dessa reta.
4. Na célula C1, digite "g".
5. Na célula A2, digite " "x" " (x entre aspas) e, em B2, " "y" " (y entre aspas).
6. Na célula C2, digite " "x" " (x entre aspas) e, em D2, " "y" " (y entre aspas).
7. Nas duas colunas x, insira os números 1, 2 e 3, células A3, A4 e A5, e C3, C4 e C5.
8. Selecione a tabela com pontos x e y da função f e altere a cor de fundo. Faça o mesmo para a tabela da função g, selecionando uma cor diferente.

   As tabelas ficarão da seguinte forma, por exemplo:

x+y = 6		x-y = 1	
x	y	x	y
1		1	
2		2	
3		3	

9. Se desejar, altere as cores das retas na Janela de Visualização para que correspondam com a cor da respectiva tabela. Para isso, desmarque as retas na Janela de Álgebra, que continuarão exibidas devido à tabela, clique com o botão direito do mouse sobre uma reta, Propriedades, aba Cor, e altere a cor.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/iEm2NrWKe7A

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Usando *Ponto* (ou digitando no campo de entrada), marque os pontos (7,1), (8,5), (0,4). Esses pontos estão sobre as retas construídas? Qual seria a condição para que eles estivessem na primeira reta construída? Qual seria a condição para que eles estivessem na segunda reta construída?
2) Alguns dos pontos coincidiram nos dois gráficos? Por quê?
3) Visualizando o gráfico, entre quais pontos está o ponto de interseção?
4) Utilizando a ferramenta ponto de intersecção pela ferramenta do GeoGebra, qual a coordenada do ponto de interseção entre os dois gráficos?
5) Sem fazer contas, em sua opinião, qual é a relação entre o ponto que você acabou de descobrir com o sistema linear de duas equações?
6) O que acontece se as coordenadas x e y desse ponto forem substituídos nas equações?
7) Refletindo sobre as questões 5 e 6, escreva a sua conclusão em relação ao ponto de intersecção e a solução do sistema.

11. RELAÇÃO ENTRE AS ÁREAS DO QUADRADO E DO TRIÂNGULO

Objetivo: Possibilitar aos alunos a investigação da relação entre a área do quadrado e a área do triângulo.

Habilidades da BNCC associadas:

"(EF04MA21) Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área" (BRASIL, 2018, p. 293).

"(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros" (BRASIL, 2018, p. 309).

"(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas" (BRASIL, 2018, p. 309).

Roteiro de Construção

1) Oculte os eixos.
2) Usando os pontos da malha, crie um quadrado de lado qualquer com a ferramenta *Polígono.*

3) Crie um triângulo retângulo de base e altura de mesma medida do lado do quadrado.
4) Com a ferramenta *Reta Paralela*, clique sobre a hipotenusa do triângulo e, em seguida, em algum ponto da malha.
5) Selecione a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta*, clique no triângulo e na reta paralela formada no passo anterior.
6) Na Janela de Álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre segmento e desmarque a opção Exibir Rótulo.
7) Com a ferramenta Área, clique sobre o quadrado e sobre os triângulos.
8) Usando *Mover*, movimente os triângulos pelo primeiro triângulo criado ou pela reta, movimentando o ponto sobre ela.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/b1Mhr3I3PQY

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Movimente o triângulo. O que você observa?
2) Mova o triângulo até que a hipotenusa coincida com a reta paralela. O que podemos observar em relação à figura formada?

12. RELAÇÃO ENTRE RETÂNGULOS DE MESMA ÁREA E DIMENSÕES DIFERENTES

Objetivo: Explorar com os alunos os conceitos de área e perímetro e a relação entre retângulos de mesma área e dimensões diferentes.

Habilidades da BNCC associadas:

“**(EF05MA20**) Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes” (BRASIL, 2018, p. 297).

“**(EF06MA29**) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área” (BRASIL, 2018, p. 303).

Roteiro de Construção

Construção 1: Construa um retângulo de forma que possamos alterar tanto a base quanto sua altura.

1. Esconda o Eixo e a Malha para melhor visualização.

2. Clique na ferramenta *Controle Deslizante* e clique sobre a janela de visualização. Na janela que abrirá, digite “Base” no campo destinado ao Nome e deixe o intervalo entre 0 e 20 com incremento de 0.5.
3. Crie também o controle “Altura” e deixe o intervalo entre 0 e 20 com incremento de 0.5.
4. Com a ferramenta *Segmento com Comprimento Fixo*, construa um segmento de comprimento “Base” (nome dado ao controle deslizante).
5. Construa duas retas perpendiculares ao segmento AB, passando por A e por B com a ferramenta *Reta Perpendicular.*
6. Construa uma circunferência de centro A e raio “Altura” (nome dado ao controle deslizante), com a ferramenta *Círculo dados Centro e Raio*.
7. Com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, clique na circunferência formada no passo anterior e na reta perpendicular que passa pelo ponto A.
8. Construa uma reta perpendicular a reta que contém o ponto A, que passe por D.
9. Com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, clique na reta perpendicular formada no passo anterior e na reta perpendicular que passa por B.
10. Com a ferramenta *Polígono* construa o polígono com os pontos A, B, E e D.
11. Para melhor visualização, esconda as retas, a circunferência, o ponto C e o segmento f, desmarcando-os na Janela de Álgebra.
12. Selecione *Distância*, *Comprimento ou Perímetro* e clique nos segmentos correspondentes à base e à altura do retângulo. Clique também sobre o polígono para exibir seu perímetro.

13. Clique na ferramenta Área e clique no retângulo.

Observação: Use *Mover* para usar os controles deslizantes e para organizar os textos.

Construção 2: Construa um retângulo de forma que possamos alterar sua altura e tenha base de 5cm.

1. Com a ferramenta *Segmento com Comprimento fixo*, construa um segmento de 5cm.
2. Construa duas retas perpendiculares passando por F e por G com a ferramenta *Reta Perpendicular.* Para isso, clique sobre o segmento de comprimento 5cm e sobre o ponto desejado.
3. Selecione *Reta Paralela*, clique no segmento de comprimento fixo e na reta perpendicular que contém o ponto F, criando o ponto H.
4. Com a ferramenta *Intersecção de Dois Objetos*, clique na reta formada no passo anterior e na reta que passa por G.
5. Com a ferramenta *Polígono*, construa um retângulo com os pontos F, G, I e H.
6. Na Janela de Álgebra, desmarque as retas e o segmento j.
7. Selecione *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clique nos segmentos correspondentes à base e à altura do retângulo. Clique também sobre o polígono para exibir seu perímetro.
8. Clique na ferramenta Área e clique no retângulo.

Observação: Para alterar a altura desse retângulo, basta movimentar o ponto H.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/Z9cGaU_dMWU

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Movimente o Controle Deslizante para que o primeiro retângulo tenha base de 12,5cm e altura de 8cm. O que é preciso fazer para que o segundo retângulo tenha a mesma área que o primeiro?
2) Vou comprar um terreno. Tenho duas opções com medidas dos retângulos da questão 1. Após comprá-lo, terei que cercá-lo. Qual dos dois terrenos seria mais vantajoso comprar? Por quê?
3) É possível ter dois retângulos com base e altura diferente com o mesmo perímetro?

13. TEOREMA DE PITÁGORAS

Objetivo: Oportunizar aos estudantes que explorem e conjecturem que a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos.

Habilidade da BNCC associada:

"(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos" (BRASIL, 2018, p. 319).

Roteiro de Construção

1. Esconda os Eixos.
2. Clique na ferramenta *Controle Deslizante*, clique sobre a janela de visualização, crie um controle de Nome "a", com intervalo de mínimo 0, máximo 15 e incremento 0.5.
3. Crie outro controle, agora de Nome "b", com o mesmo Intervalo de a.
4. Com a ferramenta *Segmento com Comprimento Fixo*, clique sobre um ponto da malha e digite "a" para o comprimento, nome dado ao controle deslizante.
5. Clique com o botão direito do mouse sobre o segmento AB, selecione Renomear e digite "Cateto1".

6. Selecione a ferramenta *Reta Perpendicular* e clique sobre o segmento Cateto 1, criado no passo anterior, e posteriormente sobre o ponto A.
7. Construa uma circunferência de centro A e raio “b”, nome de um dos controles deslizantes, com a ferramenta *Círculo dados Centro e Raio*.
8. Com a ferramenta *Intersecção de Dois Objetos*, clique na circunferência e na reta perpendicular que passa pelo ponto A, criando os pontos D e C.
9. Na Janela de Álgebra, desmarque a reta, o ponto C e a circunferência para esconder esses objetos.
10. Construa os segmentos AD e DB usando *Segmento*.
11. Clique com o botão direito do mouse sobre o segmento AD, selecione Renomear e altere o nome para “Cateto2”. Faça o mesmo para o segmento DB, renomeando-o para “Hipotenusa”.
12. Selecione *Ângulo* e clique sobre os segmentos Cateto1 e Cateto2, respectivamente, para criar o ângulo reto.
13. Com a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro*, clique sobre os catetos e sobre a hipotenusa.
14. Selecione a ferramenta *Polígono Regular* e clique sobre os pontos D e B, respectivamente e digite “4” para o número de vértices. Com a mesma ferramenta, clique sobre os pontos B e A, A e D, criando mais dois polígonos regulares com quatro vértices.
15. Selecione a ferramenta *Área* e clique sobre os três quadrados.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/OUoUy1Twd1k

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Clique em Exibir -> Planilha. Na planilha que aparecerá digite: (lembre-se há diferença com letras minúsculas e maiúsculas no GeoGebra)
   Nas células A1, A2, A3 digite “db=”, “ba=”, “ad=”
   Nas células B1, B2, B3 digite “DB”, “BA”, “AD”
   Nas células A5, A6, A7 digite “$(db)^2$=”, “$(ba)^2$=”, “$(ad)^2$=”
   Nas células B5, B6, B7 digite “$(DB)^2$”, “$(BA)^2$”, “$(AD)^2$”
   Movendo os controles deslizantes, o que pode observar em relação às áreas dos quadrados com os dados apresentados na planilha?
2) Nas células A9 e A10 digite “$(db)^2$=”, “$(ba)^2 + (ad)^2$=”.
   a) Movimentos os controles deslizantes, o que pode observar?
   b) Qual é a relação entre os três quadrados?
3) Somando as áreas dos quadrados menores, o que você pode concluir? E se variar os tamanhos da figura, a sua conclusão anterior ainda é válida?

14. CONSTRUÇÃO DE POLIEDROS DE PLATÃO COM ARESTAS DE MESMA MEDIDA

Atividade baseada no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014e).

Objetivo: Explorar as construções dos poliedros de Platão, mostrando aos alunos quais figuras geométricas planas que os compõem.

Habilidades da BNCC associadas:

“**(EF06MA18)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros” (BRASIL, 2018, p. 303).

“**(EF06MA17)** Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial” (BRASIL, 2018, p. 303).

Roteiro de Construção

1. Oculte os eixos.

2. Na barra de ferramentas clique em Exibir, Janela de Visualização 3D.
3. Com a ferramenta *Ponto*, crie pares de pontos horizontais usando a malha de modo que a distância entre eles seja a mesma e que cada par não esteja tão próximo um do outro. Assim, insira os pontos A e B, C e D, E e F, G e H e, por fim, I e J.

Cubo

4. No campo Entrada, digite "Cubo", selecione a opção Cubo(<*Ponto*>, <*Ponto*>) e insira os pontos A e B: "Cubo(A,B)".

Octaedro

5. No campo Entrada, digite "Octaedro", selecione a opção Octaedro(<*Ponto*>, <*Ponto*>) e insira os pontos C e D: "Octaedro(C,D)".

Tetraedro

6. No campo Entrada, digite "Tetraedro", selecione a opção Tetraedro(<*Ponto*>, <*Ponto*>) e insira os pontos E e F: "Tetraedro(E,F)".

Dodecaedro

7. No campo Entrada, digite "Dodecaedro", selecione a opção Dodecaedro(<*Ponto*>, <*Ponto*>) e insira os pontos G e H: "Dodecaedro(G,H)".

Icosaedro

8. No campo Entrada, digite “Icosaedro”, selecione a opção Icosaedro(<*Ponto*>, <*Ponto*>) e insira os pontos I e J: “Tetraedro(I,J)”.
9. Na Janela de Álgebra, clique como o botão direito do mouse sobre *Segmento* e desmarque a opção Exibir Rótulo. Faça o mesmo, agora clicando sobre Ponto, também na Janela de Álgebra.
10. Na Janela de Visualização 3D, oculte os eixos.

Observações:

- Com a ferramenta *Mover*, movimente a Janela de Visualização 3D para visualizar todos os sólidos.
- É possível deslocar cada poliedro movimentando as faces (polígonos) na Janela de Visualização.
- Para melhorar a visualização, feche a Janela de Álgebra.
- Para alterar o tamanho da aresta, movimente os pontos iniciais inseridos, que estão em azul.
- Para calcular o volume de cada poliedro, essa janela deve ser exibida. No campo entrada, digite “Volume”, selecione Volume(<Sólido>) e insira o nome do sólido que deseja calcular. Renomeie o número criado na Janela de Álgebra para “v” e o nome do poliedro. Por exemplo: “vcubo”.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/lpdlsisyeVs

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

11) Quais são as figuras geométricas planas que compõem cada um dos poliedros?
12) Identificadas as figuras geométricas de cada um dos poliedros, é possível calcular o perímetro de cada uma das figuras geométricas e a área total do poliedro?
13) Por meio da fórmula de Euler para Poliedros (F + V – A = 2), calcule o número de faces, vértices e arestas de cada um dos poliedros.

15. POLIEDROS: ARESTAS, FACES E VÉRTICES

Atividade baseada no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014f).

Objetivo: Propiciar aos alunos o estudo dos vértices, faces e arestas que compõem os poliedros estudados.

Habilidades da BNCC associadas:

"(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial" (BRASIL, 2018, p. 303).

"(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros" (BRASIL, 2018, p. 303).

Roteiro de construção

Os passos a seguir servem para a construção dos poliedros A, B, C, E e F:

1. Feche a Janela de Álgebra.
2. Clique em Exibir, Janela de Visualização 3D.

3. Clique com o botão direito do mouse sobre a Janela de Visualização 3D e desmarque a opção Eixos para ocultá-los.

Poliedro A:

4. Na Janela de Visualização, usando a malha, selecione *Polígono* e crie um triângulo qualquer, clicando em três pontos e no ponto inicial.
5. Clique na Janela de Visualização 3D, selecione *Extrusão para Prisma ou Cilindro*, clique no polígono nessa janela e, na caixa de diálogo que será exibida, defina uma altura qualquer para ele.
6. Oculte os Eixos na Janela de Visualização 3D para melhorar a visualização.

Poliedro B:

7. Na Janela de Visualização, usando a malha, selecione *Polígono* e crie um retângulo qualquer, clicando em quatro pontos e no ponto inicial.
8. Clique na Janela de Visualização 3D, selecione *Extrusão para Prisma ou Cilindro*, clique no polígono nessa janela e, na caixa de diálogo que será exibida, defina uma altura qualquer para ele.

Poliedro C:

9. Na Janela de Visualização, usando a malha, selecione *Polígono* e crie um retângulo qualquer, clicando em quatro pontos e no ponto inicial.

10. Clique na Janela de Visualização 3D, selecione *Extrusão para Prisma ou Cilindro*, clique no polígono nessa janela e, na caixa de diálogo que será exibida, defina uma altura qualquer para ele.
11. Selecione *Polígono*, clique em um dos vértices superiores, em seu vértice oposto e no vértice inferior, oposto aos dois primeiros vértices selecionados, inserindo um triângulo dentro da caixa.
12. Oculte, com o botão direito do mouse, desmarcando Exibir Objeto, as faces que contêm as arestas do triângulo inserido no passo anterior e as arestas e o ponto que não farão parte do sólido truncado.
13. Selecione *Polígono* e insira polígonos clicando nos vértices que formam as faces triangulares.

Poliedro D:

14. Feche a Janela de Visualização, a Janela de Álgebra e exiba apenas Janela de Visualização 3D com os Eixos e a Malha.
15. Selecione Plano e clique sobre o eixo x ou y. Se for necessário, gire a Janela de Visualização 3D de modo que o plano criado fique na diagonal.
16. Com o botão direito do mouse, clique sobre o plano, selecione propriedades, e, na aba Estilo, aumente a espessura da linha.
17. Selecione *Prisma* e crie um hexágono usando os pontos da malha do plano, de modo que o vértice inicial esteja sobre o eixo x ou y, dependendo de qual deles está no plano. Após clicar sobre o vértice inicial, prolongue o hexágono determinando o comprimento do poliedro e clique sobre um ponto da malha do plano-xy.

18. Para melhorar a visualização, oculte os eixos, a malha e o plano que contém o eixo z.

Poliedro E:

19. Na Janela de Visualização, usando a malha, selecione *Polígono Regular* e clique em dois pontos quaisquer. Na caixa de diálogo que aparecerá, referente ao número de vértices, digite "6" para criar um hexágono regular.
20. Clique na Janela de Visualização 3D, selecione *Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone*, clique no polígono nessa janela e, na caixa de diálogo que será exibida, defina uma altura qualquer para ele.

Poliedro F:

21. Na Janela de Visualização, usando a malha, selecione *Polígono* e crie um retângulo qualquer, clicando em quatro pontos e no ponto inicial.
22. Clique na Janela de Visualização 3D, selecione *Extrusão para Prisma ou Cilindro*, clique no polígono nessa janela e, na caixa de diálogo que será exibida, defina uma altura qualquer para ele.
23. Para inserir a pirâmide na parte superior da caixa, selecione *Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone*, clique sobre a face EFGH, face superior da caixa, e defina uma altura qualquer.
24. Na Janela de Álgebra, oculte a face EFGH.

Observações:

- Para alterar a cor dos sólidos, basta clicar com o botão direito do mouse sobre prisma e/ou pirâmide na Janela de Álgebra, Propriedades e fazer as alterações desejadas na aba Cor.

- Para movimentar os sólidos, use *Mover*, *Girar Janela de Visualização 3D* e/ou *Mover Janela de Visualização.*

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/hra40ncagz8

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Para cada poliedro explore a quantidade de faces de cada um.
2) Para cada poliedro explore a quantidade de vértices de cada um.
3) Para cada poliedro explore a quantidade de arestas de cada um.
4) É possível utilizar a fórmula de Euler para Poliedros ($F + V - A = 2$) para determinar o número de faces, vértices e arestas desses poliedros?

16. PIRÂMIDE E PRISMA (3D)

Objetivo: Possibilitar que os estudantes explorem as propriedades de um prisma e de uma pirâmide (ambos retos), a partir das características de suas bases e de suas alturas no GeoGebra 3D.

Habilidades da BNCC associadas:

“(EF03MA14) Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações” (BRASIL, 2018, p. 287).

“(EF04MA17) Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais” (BRASIL, 2018, p. 289).

“(EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos” (BRASIL, 2018, p. 289).

“(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial” (BRASIL, 2018, p. 303).

Roteiro de Construção

1. Feche a Janela de Álgebra e exiba a Janela de Visualização 3D pela Barra de Ferramentas.
2. Na Janela de Visualização, crie dois controles deslizantes, “L” e “h”, com intervalo de 0 a 10, e incremento 0.1.
3. Em seguida, clique em *Segmento com Comprimento Fixo*, clique sobre a Janela de Visualização e digite “L” para o comprimento.
4. Crie outro *Segmento com Comprimento Fixo*, não muito próximo do primeiro, também de tamanho L.
5. Depois, selecione *Polígono Regular*, clique sobre as extremidades de um dos segmentos criados e digite “4” para o número de vértices.
6. Com a mesma ferramenta, clique sobre as extremidades do outro segmento e digite “3” para o número de vértices.
7. Selecione *Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone*, clique sobre o quadrilátero na Janela de Visualização 3D e defina altura “h”.
8. Usando *Extrusão para Prisma ou Cilindro*, clique sobre o triangulo na Janela de Visualização 3D e digite “h” para altura.
9. Para melhorar a visualização, oculte os eixos da Janela de Visualização 3D.
10. Selecione *Mover* para movimentar os controles deslizantes e alterar os sólidos.
11. Explore a ferramenta *Planificação*, clicando sobre os sólidos com essa ferramenta e movimentando os controles que serão criados na Janela de Visualização.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/EPu0VqKp4Sc

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Quais as diferenças que você visualiza entre os prismas e as pirâmides?
2) E o que você constata em relação às faces laterais de cada figura?
3) O que você pode constatar sobre as planificações?

17. HOMOTETIA NO PENTÁGONO, TRAPÉZIO E TRIÂNGULO

Atividade baseada no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014g).

Objetivo: Possibilitar aos alunos o estudo da homotetia em diferentes figuras geométricas.

Habilidade da BNCC associada:

"(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras)" (BRASIL, 2018, p. 533).

Roteiro de Construção

Homotetia no pentágono

1. Clique com o botão direito do mouse sobre a Janela de Visualização e desmarque as opções Malha e Eixos.
2. Selecione *Polígono Regular*, clique sobre dois pontos distintos A e B, sendo que a distância entre eles será a

medida da aresta do pentágono e, na caixa de diálogo que aparecerá, digite “5” para criar o pentágono.

3. Selecione *Homotetia*, clique sobre o polígono, clique num ponto qualquer fora dele, criando um ponto F, e, na caixa de diálogo que aparecerá, digite “2” para o fator de ampliação.
4. Clique novamente sobre o polígono inicial, sobre o ponto F, agora com fator de redução “0.5”.
5. Selecione *Semirreta*, clique sobre o ponto F e em um vértice do pentágono inicial. Faça o mesmo para todos os vértices desse pentágono.
6. No campo Entrada, digite “Vértice”, selecione a opção Vértice(<*Polígono*>) e insira o nome do polígono maior, “pol1’”, para exibir os vértices: Vértice(pol1’).
7. No campo Entrada, digite “Vértice”, selecione a opção Vértice(<*Polígono*>) e insira o nome do polígono menor, “pol1’_1”, para exibir os vértices: Vértice(pol1’_1).
8. Na Janela de Álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre Semirreta e desmarque a opção Exibir Rótulo.
9. Movimente os vértices do polígono inicial e o centro F da homotetia usando *Mover*.

Homotetia no trapézio e no triângulo

Trapézio

1. Clique com o botão direito do mouse sobre a Janela de Visualização e desmarque as opções Malha e Eixos.
2. Selecione *Polígono* e clique em quatro pontos distintos para formar um trapézio.
3. Selecione *Homotetia*, clique sobre o polígono, clique num ponto qualquer à esquerda do polígono, criando um

ponto E, e, na caixa de diálogo que aparecerá, digite “2” para o fator de ampliação.

4. Clique novamente sobre o polígono inicial, sobre o ponto E, agora com fator de redução “-1”.
5. Crie também, usando *Homotetia*, um trapézio de razão -2.
6. Selecione *Reta*, clique no ponto E e em um vértice do trapézio inicial. Faça o mesmo para todos os vértices desse trapézio e observe.

Triângulo

7. Selecione *Polígono* e clique em três pontos distintos para formar um triângulo.
8. Selecione *Homotetia*, clique sobre o polígono, clique num ponto qualquer fora dele, e, na caixa de diálogo que aparecerá, digite “-1.5” para o fator de ampliação.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/b39x29G6OVA

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) O que você observa ao inserir as semirretas e/ou retas em cada caso?

2) Usando *Distância, Comprimento ou Perímetro* e a ferramenta Área é possível comparar grandezas entre as figuras. Meça um lado do polígono original e seu lado correspondente na figura ampliada. Exiba também a área. Movimente os vértices do polígono criado inicialmente e o ponto central da homotetia. Observe e descreva a relação entre os valores.
3) Qual a relação entre os polígonos criados na construção que tem como centro da homotetia o ponto E? O que você pode afirmar sobre a razão?

18. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Objetivo: Possibilitar que os alunos verifiquem as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo.

Habilidade da BNCC associada:

“**(EF09MA14**) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes” (BRASIL, 2018, p. 319).

Roteiro de Construção

1. Oculte os eixos, clicando com o botão direito do mouse sobre a Janela de Visualização, desmarcando a opção Eixos.
2. Selecione *Ret*a e clique sobre dois pontos da malha para criar uma reta horizontal, inserindo os pontos A e B.
3. Secione *Reta Perpendicular,* clique sobre a reta criada no passo anterior e sobre o ponto B.
4. Com a ferramenta *Ponto em Objeto*, crie um ponto C sobre a reta perpendicular que passa por B, acima da reta horizontal.
5. Selecione *Polígono* e crie o triângulo ABC.

6. Clique com o botão direito do mouse sobre o lado AB do triângulo, selecione Renomear e altere o nome para "CA", cateto adjacente ao ângulo que será criado, renomeie o segmento BC para "CO", que será o cateto oposto, e o segmento CA para "HIP", hipotenusa do triângulo.
7. Desmarque as retas na Janela de Álgebra para ocultá-las.
8. Selecione Ângulo e clique, respectivamente, sobre os segmentos CA e HIP para criar o ângulo α, e sobre os segmentos CO e CA para criar o ângulo reto β.
9. Clique com o botão direito do mouse sobre α, Propriedades, e, na aba Básico, altere Ângulo Entre para 0° e 180°. Faça o mesmo para o ângulo β.
10. Selecione *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clique sobre os lados do triângulo para exibir as medidas.
11. No campo Entrada, crie números referentes às razões seno, cosseno e tangente, digitando "senoα=CO/HIP", "cossenoα=CA/HIP" e "tangenteα=CO/CA".
12. Usando *Mover*, arraste os números da Janela de Álgebra para a Janela de Visualização e organize-os.
13. Feche a Janela de Álgebra para melhorar a visualização e movimente os vértices para analisar as razões.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/A5FRhyTXVUY

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) O que acontece com o valor de seno, cosseno e tangente quando movimentamos os vértices A e B do triângulo? Por que isso acontece?
2) E o que acontece com os valores de seno, cosseno e tangente quando se movimenta o vértice C?

19. CONSTRUÇÃO DE FUNÇÕES DE GRANDEZAS DE RETÂNGULOS DE MESMO PERÍMETRO

Atividade baseada no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014h).

Objetivo: Proporcionar aos alunos a construção e o estudo de gráficos de funções referentes à área e à medida dos lados de retângulos de perímetro fixo e dimensões diferentes, com a possibilidade de comparação entre essas figuras e suas respectivas grandezas representadas graficamente.

Habilidades da BNCC associadas:

"(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais" (BRASIL, 2018, p. 536).

"(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas" (BRASIL, 2018, p. 545).

Roteiro de Construção

1. Crie um *Controle Deslizante* de nome “X”, mínimo “0”, máximo “11” e incremento: “0.5”, preferencialmente no canto superior esquerdo da Janela de Visualização.
2. No campo Entrada, insira os pontos “A=(0,0)”, “B=(0,-X+11)”, “C=(X,-X+11)” e “D=(X,0)”.
   Observação: Para inserir os pontos, não é necessário digitar o nome de cada um. Basta inserir as coordenadas na ordem acima e o GeoGebra criará os respectivos pontos.
3. Selecione *Polígono* e crie o polígono ABCD.
4. Selecione *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clique sobre os pontos B e C, C e D, e sobre o polígono ABCD. Sugestão: Caso os vértices estejam muito próximos, selecione Mover e altere o valor do controle X.
5. Dê dois cliques sobre o texto AB e altere Nome[B] + (Nome[C]) para “X”.
6. Dê dois cliques sobre o texto BC e altere Nome[C] + (Nome[D]) para “X”.
7. Selecione Área e clique sobre o polígono ABCD.
8. Na Barra de Ferramentas, clique em Exibir, Janela de Visualização 2.
9. Clique com o botão direito do mouse sobre a Janela de Visualização 2, selecione Janela de Visualização. Nas abas EixoX e EixoY, marque a opção Distância e selecione 1. Na aba Malha, marque a opção Exibir Malha e Distância: x: “1” y: “1”.
10. Clique sobre a Janela de Visualização 2 e, no campo Entrada, insira as funções “-x+11” e “-x^2+11x”, e os pontos E=(X,0), F=(X,-X+11), G=(X,-X^2+11X).
11. Selecione *Segmento* e crie os segmentos EF e EG.

12. Selecione *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clique sobre os pontos E e F, E e G.
13. Dê dois cliques sobre o texto EF e altere Nome[E] + (Nome[F]) para “Y”.
14. Dê dois cliques sobre o texto EG e altere Nome[E] + (Nome[G]) para “Área”.
15. Feche a Janela de Álgebra e, com a ferramenta *Mover*, altere o valor de X pelo controle.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/pYa5ppeLrYE

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) De acordo com o gráfico, você consegue identificar qual a medida do lado X do retângulo para que ele tenha a maior área? Verifique alterando o valor de X pelo controle deslizante. Nesse caso, qual a medida do lado Y? Que figura geométrica é essa?
2) “Como varia Y à medida que o valor de X aumenta? O gráfico representa uma variação proporcional entre X e Y?” (SÃO PAULO, 2014h, p. 91).

20. PG DOS INFINITOS TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS

Atividade baseada no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014i).

Objetivo: Explorar com os alunos o conceito de Progressão Geométrica (PG) com triângulos equiláteros, por meio das construções de triângulos inscritos.

Habilidade da BNCC associada:

“**(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas” (BRASIL, 2018, p. 541).

Roteiro de Construção

1. Oculte os eixos.
2. Com a ferramenta *Ponto*, crie os pontos A e B horizontais, usando os pontos da malha, de modo que a distância entre eles seja de uma unidade e dê um zoom na Janela de Visualização.
3. Selecione *Polígono Regular*, clique nos pontos B e A, respectivamente, e defina “3” para o número de vértices.

4. Selecione a ferramenta *Ponto Médio ou Centro* e clique sobre os lados do triângulo.
5. Selecione *Polígono* e crie um triângulo que tenha como vértices os pontos médios encontrados no passo anterior.
6. Selecione novamente a ferramenta *Ponto Médio ou Centro* e clique sobre os lados do triângulo criado no passo anterior.
7. Crie outro triângulo com esses vértices usando a ferramenta *Polígono.*
8. Confira as medidas usando a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro.*

Observações:

- Organize os valores usando *Mover*, se for necessário.
- Para alterar o lado do triângulo maior, movimente o ponto A ou B.
- Se desejar, oculte a malha ao final da construção.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/kz35-kyumQo

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Qual é a constante de proporcionalidade dos triângulos que constituem a respectiva Progressão Geométrica?

2) Qual é o valor do perímetro dos três primeiros triângulos construídos em Progressão Geométrica?
3) Qual é o valor da área dos três primeiros triângulos construídos em Progressão Geométrica?

21. FUNÇÃO AFIM

Objetivo: Oportunizar aos alunos que estudem o comportamento dos gráficos das funções, conjecturando sobre o que acontece com a variação dos parâmetros, e que percebam quais são as variáveis dependentes e as independentes.

Habilidade da BNCC associada:

"**(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica" (BRASIL, 2018, p. 539).

"**(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau" (BRASIL, 2018, p. 541).

Roteiro de Construção

1. Selecione *Controle Deslizante*, clique sobre a Janela de Visualização e crie o controle "a" de mínimo -10, máximo 10 e incremento 0.1.

2. Crie outro controle “b” com o mesmo intervalo de a, usando *Controle Deslizante*.
3. No campo Entrada, digite “ax” para inserir a função f(x). Insira também a função g(x), digitando “ax+b”.
   Observação: Selecione *Mover* para movimentar os controles a e b.
4. Na Barra de Ferramentas, clique em Exibir, Planilha.
5. Na célula A1, digite “X”.
6. Na célula B1, digite “F(X)”.
7. Na célula C1, digite “G(X)”.
8. Na coluna X, digite os valores de -4 a 10.
9. Na célula B2, insira a fórmula f(A2), digitando “=f(A2)” e dê *enter.* Depois selecione e arraste essa fórmula para as outras células B.
10. Na célula C2, digite “=g(A2)”e dê *enter.* Depois arraste essa fórmula para as outras células C. Mais uma vez, selecione e arraste essa fórmula para as outras células C.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/The9xOjZvdI

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Variando o parâmetro *a*, o que você observa em cada gráfico? E variando esse parâmetro, o que você

observa na distância entre as duas retas? A partir dessa observação, em sua opinião, qual é o significado geométrico de *a*?

2) Variando o parâmetro *b*, o que você observa em cada gráfico? E na distância entre eles? A partir dessa observação, em sua opinião, qual é o significado de *b*?

22. FUNÇÃO QUADRÁTICA

Objetivo: Oportunizar aos estudantes a exploração da função quadrática e que estudem o comportamento de seu gráfico, inferindo sobre a forma como as variações em cada parâmetro afetam esse comportamento.

Habilidade da BNCC associada:

“(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$” (BRASIL, 2018, p. 541).

Roteiro de Construção

1. Digite no campo Entrada a função ax^2 + bx + c para inserir a função f(x). Na caixa de diálogo que aparecerá, selecione Criar Controles Deslizantes.
2. No campo Entrada, digite “V = ((-b) / (2a), (-(b² - 4a c)) / (4a))”, coordenada do vértice da parábola.
3. Em seguida, habilite o rastro de V, clicando com o botão direito do mouse sobre ele, marcando a opção Habilitar Rastro.

Observações:

- Movimente os controles usando *Mover*.
- Para apagar o rastro, basta movimentar a Janela de Visualização.
- Se desejar alterar o intervalo dos controles deslizantes, na Janela de Álgebra, clique com botão direito do mouse sobre Número, Propriedades, e na aba Controles Deslizantes, altere o mínimo o máximo e o incremento.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/U1QLQ5gjb-o

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Como a variação do parâmetro *a* afeta o gráfico?
2) O que podemos concluir em relação à variação do parâmetro *b*? E em relação à trajetória descrita pelo vértice quando somente esse parâmetro varia?
3) Como a variação do parâmetro *c* afeta o gráfico?

23. FUNÇÕES INVERSAS: EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Atividade baseada no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014j).

Objetivo: Possibilitar aos alunos a comparação entre os pontos das funções inversas, em particular a exponencial e a logarítmica, a fim de que identifiquem a simetria em relação à reta y = x.

Habilidade da BNCC associada:

"(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função" (BRASIL, 2018, p. 544).

Roteiro de Construção

1. Selecione *Controle Deslizante* para criar o controle a, com intervalo de mínimo 0, máximo 10 e incremento 0.1.
2. No campo Entrada, insira a função f(x) digitando "a^x".
3. Para inserir a função g(x)=, digite, no campo Entrada, "Se", necessariamente com letra maiúscula, e selecione a opção (<Condição>, <Então>). Altere <Condição> para

"a≠0" e, em <Então>, digite "log", selecione log(<b>,<x>) e insira a base "a" e o logaritmando "x": "Se[a≠0, log(a,x)]".
Observação: o GeoGebra já restringe a função para a=1 nessa função.

4. No campo Entrada, insira "y=x".
5. Selecione *Reta Perpendicular*, selecione a reta y=x e clique sobre ela para inserir uma reta perpendicular, criando o ponto A sobre y=x, fora da origem.
6. Selecione *Mover* e altere o valor do controle a de modo que as duas funções interceptem a reta perpendicular a y=x.
7. Selecione *Intersecção de Dois Objetos*, clique sobre a reta perpendicular a y=x e sobre f(x), criando o ponto B. Faça o mesmo para marcar a intersecção da reta com g(x), criando o ponto C.
8. Selecione *Segmento* e crie os segmentos AB e AC.
9. Clicando com o botão direito do mouse sobre a reta perpendicular a y=x, desmarque a opção Exibir Objeto.
10. Selecione *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clique sobre os segmentos AB e AC.
11. Na Janela de Álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre Segmento, Propriedades e altere Exibir Rótulo para Valor.

    Observação: Use *Mover* para alterar o valor de a e movimente o ponto A sobre a reta y=x.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/Ud-Qn1SIChM

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Movimente o ponto A sobre a reta y = x. O que você observa em relação à distância dessa reta até os pontos B e C?
2) O que você pode afirmar sobre as coordenadas dos pontos B e C?

24. LEI DOS SENOS

Atividade baseada no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014k).

Objetivo: Possibilitar aos alunos que conjecturem e validem a proporção da Lei dos Senos para ângulos de diferentes triângulos inscritos em circunferências distintas.

Habilidade da BNCC associada: (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. (BRASIL, 2018, p. 545)

Roteiro de Construção

1. Clique com o botão direito do mouse sobre a Janela de Visualização e desmarque as opções Eixos e Malha.
2. Selecione *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*,clique na Janela de Visualização e insira uma circunferência de qualquer raio.
3. Clicando com o botão direito sobre o ponto A, centro da circunferência, selecione Renomear e altere para O.
4. Renomeie o ponto B para D.

5. Renomeie também a circunferência para "c1" e, clicando com o botão direito do mouse sobre ela, desmarque a opção Exibir Rótulo
6. Selecione *Ponto* e marque os pontos A, B e C sobre a circunferência, clicando sobre elas no sentido horário.
7. Selecione *Polígono* e clique sobre os pontos A, B, C e A para formar um triângulo.

   Observação: Os nomes dos segmentos, lados do triângulo, devem estar de acordo com seus respectivos vértices opostos:
   - Ponto A: segmento oposto "a";
   - Ponto B: segmento oposto "b";
   - Ponto C: segmento oposto "c".
8. Selecione Ângulo, insira os ângulos α, β e γ clicando nos respectivos pontos:
   - Pontos C, A e B;
   - Pontos A, B e C;
   - Pontos B, C e A.
9. Selecione *Reta*, clique sobre os pontos O e D.
10. Selecione Interseção de Dois Objetos, clique sobre a reta criada e sobre a circunferência.
11. Na Janela de Álgebra, desmarque o ponto E.
12. Selecione *Segmento*, crie o segmento DF.
13. Na Janela de Álgebra, desmarque a reta para ocultá-la.
14. Renomeie o segmento DF para d.
15. Selecione *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clique no segmento DE, diâmetro da circunferência, e sobre os lados a, b e c do triângulo.
16. No campo Entrada, insira as razões:
    - "a/sen(α)";
    - "b/sen(β)";
    - "c/sen(γ)".

17. Como sugestão, altere o nome dos valores para "asenα", "bsenβ" e "csenγ", respectivamente.

Inserindo texto:

Exemplo: $\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{4.4}{sen(31.23°)} = 8.49$

- Selecione *Texto*.
- Habilite Fórmula LaTex, selecione Fração, altere a e b para α e sen(α).
- Insira "=" e outra fração.
- Altere a e b selecionando o Objeto α e, para b, seno do Objeto α.
- Insira "=" e, em Objeto, selecionar o número que corresponde à razão.

Analogamente é possível inserir textos correspondentes as outras razões. Para facilitar, copie o comando do primeiro texto, cole e altere o que for preciso pra inserir o texto referente à outra razão.

Alterando cores:

Como sugestão, deixe os ângulos e seus respectivos lados opostos da mesma cor.

- Pressione a tecla Ctrl e selecione os objetos para alterar a cor.
- Clique com o botão direito do mouse sobre eles, clique na aba Cor e altere como desejado ou use o atalho na Janela de Visualização.

Observação: Também é possível alterar a cor do texto, sem selecioná-los com a tecla Ctrl, isto é, fazendo as alterações separadamente do ângulo e do segmento correspondente.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/VEV0cFZrK8A

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Movimente os vértices do triângulo. O que você observa nas razões?
2) Existe relação entre elas e o diâmetro da circunferência?

25. CUBO INSCRITO NO OCTAEDRO

Objetivo: Possibilitar aos alunos o estudo do cubo inscrito no octaedro, explorando os conceitos de área e volume desses sólidos.

Habilidade da BNCC associada:

"(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais" (BRASIL, 2018, p. 537).

Roteiro de Construção

1. Na Barra de Ferramentas, clique em Exibir, Janela de Visualização 3D.
2. Clique com botão direito do mouse sobre essa janela e desmarque a opção Eixos para ocultá-los.
3. Em seguida, com a ferramenta *Ponto*, crie dois pontos quaisquer A e B sobre o plano e oculte-o.
4. No campo entrada digite "Octaedro", selecione a opção Octaedro(<Ponto>,<Ponto>) e insira os pontos A e B: "Octaedro(A,B)".

5. Movimente o ponto C de modo que ele seja o vértice superior do octaedro.
6. Gire a Janela de Visualização 3D para que a face frontal seja o triângulo ABC.
7. Selecione *Ponto Médio ou Centro*, clique na face BEC para criar o ponto G, na face ABC para criar o ponto H, e na face ABD, criando ponto I.
8. No campo Entrada, digite "Cubo", selecione a opção Cubo(<Ponto>,<Ponto>,<Ponto>) e insira os pontos G H I, respectivamente: "Cubo(G,H,I)".
9. Na Janela de Álgebra, clique com botão direito do mouse sobre Ponto e desmarque a opção Exibir Rótulo.
10. Feche a Janela de Álgebra.

Observações:

- Se for necessário, clique com o botão direito do mouse sobre Segmento na Janela de Álgebra e desmarque a opção Exibir Rótulo.
- Se desejar, selecione o cubo na Janela de Álgebra e altere sua cor e transparência no atalho da Janela de Visualização 3D. Também é possível alterar clicando com o botão direito do mouse sobre o cubo na Janela de Álgebra, Propriedades, na aba Cor. por fim Fecha a janela de álgebra e se desejar alterar a aresta do octaedro movimento os pontos azuis que correspondem aos pontos A e B criados no início da construção.
- Para alterar a aresta do octaedro, movimente os pontos azuis que correspondem aos pontos A e B criados no início da construção.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/rlKHsGBPjFk

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Qual é o perímetro, a área e o volume do cubo?
2) Qual é o perímetro, a área e o volume do octaedro?
3) Imagine a seguinte situação: foi colocado um cubo inscrito em um octaedro e em seguida, esse octaedro foi enchido de água. Qual o volume de água que coube nesse octaedro?

26. ESFERA INSCRITA E CIRCUNSCRITA NO CUBO

Objetivo: Possibilitar que os alunos observem as relações entre as medidas do cubo e da esfera inscrita e circunscrita nele.

Habilidade da BNCC associada:

"(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais" (BRASIL, 2018, p. 537).

Roteiro de Construção

1. Clique em Exibir, Janela de Visualização 3D.
2. Na Janela de Visualização, usando a malha, selecione *Ponto* e insira dois pontos, A e B, sendo que a distância entre eles será a medida da aresta do cubo, diâmetro da esfera inscrita.
3. No campo Entrada, digite "Cubo", selecione a opção Cubo(<*Ponto*>, <*Ponto*>) e insira os pontos A e B: "Cubo(A,B)".

4. Na Janela de Álgebra, clique como o botão direito do mouse sobre *Segmento* e desmarque a opção Exibir Rótulo.
5. Clique na ferramenta *Ponto Médio ou Centro* e clique nos pontos de extremidade de uma das diagonais do cubo e em uma das faces do sólido ou pela Janela de Álgebra.
6. Selecione *Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos*, clique no ponto central do cubo e sobre o centro da face encontrados.
7. Para inserir a esfera circunscrita, selecione *Esfera dados Centro e Um de Seus Ponto*s, clique no ponto médio da diagonal, centro do cubo e em qualquer vértice ou selecione *Esfera dados Centro e Raio* e insira a medida da metade do comprimento do segmento, ou seja, metade da medida da diagonal do cubo.
8. Para alterar a cor e a transparência dos sólidos, clique com *Mover* sobre eles e use o atalho na Janela de Visualização 3D, ou clique com o botão direito do mouse sobre eles na Janela de Álgebra, Propriedades, na aba Cor.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/wDhSgFTTs3o

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Que relação você observa entre a medida da aresta do cubo e o raio e diâmetro da circunferência inscrita?
2) Qual a relação entre a diagonal do cubo com a esfera circunscrita? Se achar necessário, utilize a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro.
3) Qual a relação entre os raios das duas esferas?

27. CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO 1

Objetivo: Possibilitar aos alunos que explorem gráficos de funções trigonométricas, relacionando-os com o círculo trigonométrico.

Habilidade da BNCC associada:

"(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria" (BRASIL, 2018, p. 536).

Roteiro de Construção

Seno, cosseno e tangente:

1. Oculte a Malha, clicando com o botão direito do mouse sobre a Janela de Visualização e desmarcando
2. Selecione a ferramenta *Ponto* e insira o ponto A=(0,0), origem do plano cartesiano, clicando sobre essa coordenada.
3. Selecione *Círculo dados Centro e Raio*, clique no ponto A e digite "1", raio da circunferência.

4. Selecione *Ponto* e clique sobre a circunferência, fora dos eixos, inserindo o ponto B.
5. Ainda com a ferramenta *Ponto*, crie o ponto C na interseção da circunferência com o eixo x na coordenada (1,0).
6. Crie um *Segmento* AB.
7. Clique com o botão direito do mouse sobre o segmento na Janela de Visualização ou na Janela de Álgebra e desmarque a opção Exibir Rótulo.
8. Selecione Ângulo, clique sobre os pontos C, A e B, respectivamente, para criar o ângulo α.
9. No campo Entrada, crie o ponto D digitando "D=(x(B),0)", e o ponto E digitando "E=(0,y(B))", ambos dependentes do ponto B.
10. Selecione *Segmento* e crie os segmentos EB e DB.
11. Oculte o nome dos segmentos clicando com o botão direito sobre cada um deles, desmarcando a opção Exibir Rótulo.
12. Usando *Mover*, clique sobre o segmento EB e, no atalho da Janela de Visualização, escolha um tracejado. Faça o mesmo para o segmento DB.
13. No campo Entrada, digite "F=(1,tg(α))" para criar o ponto F.
14. Selecione *Segmento*, crie o segmento BF e, clicando com o botão direito do mouse sobre ele, desmarque a opção Exibir Rótulo.
15. Com a mesma ferramenta do passo anterior, crie os segmentos AE, AD e CF.
16. Renomeie o segmento AE para "seno", AD para "cosseno" e CF para "tangente", clicando com o botão direito do mouse sobre cada um, selecionando Renomear.
17. Altere a cor de seno, cosseno e tangente pelo atalho na Janela de Visualização ou clicando com o botão direito do mouse sobre cada um, Propriedades, Cor.

18. Na barra de ferramentas, clique em Exibir e em Janela de Visualização 2.
19. Clique com o botão direito sobre a Janela de Visualização 2 e selecione Janela de Visualização. Na aba EixoX, marque a opção Distância e selecione π/2. Na aba EixoY, marque Distância e selecione 1.
20. Clique sobre a Janela de Visualização 2 para selecioná-la usando *Mover* e, no campo Entrada, insira os pontos "G=(α,cos(α))", "H=(α,sen(α))" e "I=(α,tg(α))".
21. Selecione *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clique sobre os segmentos seno, cosseno e tangente.
22. Para que os pontos na Janela de Visualização 2 tenham as mesmas cores de seus respectivos segmentos, selecione a ferramenta *Copiar Estilo Visual*, clique no segmento cosseno, no ponto G e pressione a tecla Esc. Selecione novamente *Copiar Estilo Visual*, clique sobre o segmento seno, no ponto H e pressione Esc. Faça o mesmo clicando no segmento tangente e no ponto I.

    Observação: Para este passo, é importante que os pontos da na Janela de Visualização 2 não estejam agrupados. Se for necessário, movimente o ponto B sobre a circunferência.

Secante, cossecante e cotangente:

23. Selecione *Ponto* e clique no ponto onde o eixo y intercepta a circunferência acima do eixo x, ou seja, o ponto J=(0,1).
24. Selecione *Reta Paralela*, clique sobre o eixo x e sobre o ponto J para inserir uma reta que passe por J e seja paralela a esse eixo.
25. Selecione *Reta* e clique sobre os pontos A e F.

26. Com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, clique sobre as duas retas inseridas nos passos anteriores, ou seja, a reta paralela que passa por J e a reta que passa por A e J, criando o ponto K.
27. Clique com o botão direito do mouse sobre a reta que contém os pontos A e F e oculte o rótulo.
28. Crie o *Segmento* JK e, com o botão direito do mouse, em Propriedades, o renonomeie para "cotangente", altere sua cor e, se desejar, aumente sua espessura nas abas Básico, Cor e Estilo.
29. Selecione *Reta Perpendicular*, clique sobre a reta que passa pelos pontos A e F e, em seguida, clique no ponto B.
30. Selecione *Interseção de Dois Objetos*, clique sobre a reta perpendicular que passa por B, criada no passo anterior, e sobre o eixo x para criar o ponto L. Clique novamente sobre a reta e sobre o eixo y para criar o ponto M.
31. Crie o *Segmento* CL e o *Segmento* JM.
32. Com o botão direito do mouse, renomeie o segmento CL para "secante" e JM para "cossecante". Altere a cor de cada um deles pelo atalho da Janela de Visualização.
33. Selecione *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clique sobre os segmentos cossecante, cotangente e secante.
34. Clique sobre a Janela de Visualização 2 usando *Mover* para selecioná-la e, no campo Entrada, insira os pontos "N=(α,cotg(α))", "O=(α,sec(α))" e "P=(α,cosec(α))".
35. Para que os pontos na Janela de Visualização 2 tenham as mesmas cores de seus respectivos segmentos, selecione a ferramenta *Copiar Estilo Visual*, clique no segmento cotangente, no ponto N e pressione a tecla Esc. Selecione novamente *Copiar Estilo Visual*, clique no segmento secante, no ponto O e pressione Esc. Faça o mesmo clicando no segmento cossecante e no ponto P.

Observação: Os pontos e segmentos podem ser selecionados nas janelas de visualização ou na Janela de Álgebra.

36. Oculte o rótulo da reta perpendicular que passa pelos pontos L, B e M.
37. Na Janela de Álgebra, selecione os pontos P, O, N, I, H e G, clique com o botão direito do mouse sobre um deles e selecione Habilitar Rastro.

    Observação: Se desejar exibir os gráficos de funções específicas, como seno e cosseno, basta habilitar apenas o rastro dos pontos correspondentes a essas funções.
38. Ainda na Janela de Álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre Ponto e desmarque Exibir Rótulo.
39. Para melhorar a visualização, feche a Janela de Álgebra.

    Observação: Se quiser dividir o círculo trigonométrico em ângulos de 15 graus, por exemplo, clique com botão direito do mouse sobre a Janela de Visualização, Janela de Visualização e, na aba Malha, altere o tipo de malha para polar. Marque a opção Distância e escolha π/12 para e marque a opção Exibir Malha.
40. Mova o ponto B (azul claro) e observe. É possível animar o ponto B clicando com o botão direito do mouse sobre ele, marcando a opção Animar, se desejar. Para interromper a animação, desmarque a opção Animar, clicando com o botão direito do mouse sobre o ponto B na Janela de Álgebra.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/_tH7nFiJkZ0

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Com base no gráfico do seno e do cosseno, monte no seu caderno uma tabela identificando quais são os valores para os ângulos de 0°, 90°, 180°, 270° e 360°?
2) Com base no gráfico da tangente e da cotangente, o que podemos observar sobre os valores de 30°, 45° e 60° graus para cada uma das funções? O que podemos concluir dessas funções?
3) Observando o gráfico da tangente, o que podemos concluir sobre os ângulos de 90° e 270°? Justifique sua resposta.
4) Compare o comportamento dos gráficos. O que podemos observar em relação ao domínio, imagem, amplitude e periodicidade?

28. CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO 2

Objetivo: Oportunizar aos estudantes que identifiquem as relações trigonométricas no círculo trigonométrico.

Habilidade da BNCC associada: (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. (BRASIL, 2018, p. 536).

Roteiro de Construção

5. Oculte a malha.
6. Com a ferramenta *Ponto*, crie o ponto A na interseção dos eixos x e y e o renomeie para O.
7. Selecione *Círculo Dados Centro e Raio* e crie um círculo com centro em O e raio 1. Se achar necessário, clique com o botão direito em cima do círculo e depois clique em Propriedades, na janela Estilo, aumente a espessura do círculo.
8. Crie um Ponto na circunferência, fora dos eixos, e renomeie-o para P.
9. Trace um *Segmento* ligando O a P.

10. Selecione *Reta Paralela*, clique no eixo y e no ponto P para criar uma reta paralela a esse eixo que passe por P.
11. Ainda com a ferramenta *Reta Paralela*, clique sobre o eixo x e sobre o ponto P. Uma reta paralela a esse eixo será construída, passando por P.

    Observação: Se achar necessário, clique com o botão direito em cima das retas construídas, Propriedades, na aba Estilo, selecione a opção de linha tracejada, ou selecione as retas usando Mover e altere pelo atalho na Janela de Visualização.
12. Selecione *Interseção de Dois Objetos* e marque a interseção das retas paralelas com os eixos.
13. Com a ferramenta *Segment*o, trace um segmento que liga O ao primeiro ponto de interseção marcado e outro que liga O ao segundo ponto encontrado no passo anterior. Aumente a espessura desses dois segmentos e mude as cores.
14. Clique com o botão direito em cima do segmento sobre o eixo x e mude seu nome para "cossenoα". Altere também o nome do segmento sobre o eixo y para "senoα".
15. Ache o ângulo α entre o eixo x e o raio OP, clicando sobre o eixo x e sobre o segmento com a ferramenta Ângulo.
16. Insira a coordenada (1,0) no campo de entrada ou clique sobre ela com a ferramenta *Ponto* para criá-lo.
17. Em seguida, trace uma *Reta Perpendicular* ao eixo x passando pelo ponto (1,0).
18. Trace uma *Reta* passando por O e P.
19. Ache o ponto de interseção entre as duas retas encontradas nos passos anteriores com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, criando o ponto D.

20. Ligue por um *Segmento* esse ponto de interseção, D, com o ponto (1,0). Mude a cor e a espessura do segmento e o renomeie para “tangenteα”.
21. Esconda a reta que contém os pontos O e P, clicando em cima dela com o botão direito, desmarcando Exibir Objeto.
22. Clique em *Reflexão em Relação a uma Reta* e ache as reflexões de P em relação ao eixo x e y, clicando sobre ele e sobre o eixo correspondente. Ache também a reflexão de um desses novos pontos para o terceiro quadrante, clicando nele e no eixo necessário.
23. Ainda com a mesma ferramenta, ache as reflexões dos segmentos senoα e cossenoα em relação aos eixos y e x, respectivamente. Altere suas cores.
24. Selecione *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clique sobre os segmentos criados anteriormente, que estão sobre os eixos, e sobre o segmento tangenteα.

    Observação: Use *Mover* para organizar os textos e movimentar o ponto P.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/hA9ZvGdKqEQ

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Mova o ponto P sobre a circunferência. O que acontece com os valores assumidos pelas funções seno, cosseno e tangente de α, quando o ponto P está em cada um dos quadrantes? Anote as observações.
2) O que acontece com o valor da função tangente quando os ângulos são retos?

29. CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO 3

Objetivo: Oportunizar aos estudantes que explorem gráficos das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, relacionando-os com o círculo trigonométrico.

Habilidade da BNCC associada: (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. (BRASIL, 2018, p. 536).

Roteiro de construção

1. Oculte a Malha.
2. Crie um Ponto na origem do plano cartesiano digitando "O=(0,0)" no campo Entrada.
3. Selecione *Círculo Dados Centro e Raio*, clique sobre o centro O e digite "1" para o comprimento do raio.
4. Selecione *Controle Deslizante*, clique sobre a Janela de Visualização, preferencialmente na parte inferior. Na caixa de diálogo que aparecerá, selecione Ângulo e defina mínimo "-720°", máximo "720°" e incremento "1°" para criar o ângulo α.

5. Crie um *Ponto* A=(1,0), uma das interseções da circunferência com o eixo x, clicando sobre essa coordenada.
6. Selecione a ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa e clique sobre os pontos A e O, respectivamente, apague o ângulo que estiver digitado e digite "α" para a amplitude. Será criado também um ponto A' sobre a circunferência.
7. Selecione *Reta Perpendicular*, clique sobre o eixo x e sobre o ponto A, sobre o eixo x e sobre A' e, por fim, clique sobre o eixo y e novamente sobre o ponto A'.
8. Selecione *Reta* e crie uma reta, clicando nos pontos O e A'.
9. Com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, clique sobre o eixo x e sobre a reta perpendicular a ele, que passa pelo ponto A', criando o ponto B. Clique sobre o eixo y e o sobre a reta perpendicular a ele, que passa por A', criando o ponto C. Por fim, clique sobre a reta definida por O e A' e sobre a reta perpendicular que passa por A, criando o ponto D.
10. Na Janela de Álgebra, desmarque todas as retas para ocultá-las.
11. Com a ferramenta *Segmento*, crie o segmento OB, que corresponde ao cosseno, o segmento OC, que corresponde o seno, e o segmento AD, que corresponde à tangente. Crie também os segmentos BA', A'C, AO' e A'D.
12. Na Janela de Álgebra, clique com botão direito do mouse sobre Segmento e desmarque a opção Exibir Rótulo.
13. Na Janela de Visualização, clique com botão direito do mouse sobre o ângulo β oculte o rótulo.
14. Usando Mover, altere a cor dos segmentos que correspondem a seno, cosseno e tangente pelo atalho na Janela de Visualização ou clicando com o botão direito do mouse sobre cada um deles, Propriedades,
15. Altere o estilo dos demais segmentos para tracejado.

16. No campo Entrada, digite "senα=sen(α)" para criar o número a. Da mesma forma, crie o número "cosα=cos(α)", b, e o número d, digitando "tgα=tan(α)".
17. Insira os pontos E, F e G digitando, no campo Entrada, "(α, sen(α))", "(α, cos(α))" e "(α, tan(α))", respectivamente.
18. Selecione *Texto*, clique, preferencialmente, na parte inferior da Janela de Visualização. Na caixa de diálogo, habilite Fórmula LaTex, digite "senα=a", selecionando "α" em Símbolos, Básico, e o número "a", que corresponde ao valor de seno, em Objetos. Da mesma forma, insira os textos "cosα=b" e "tanα=d", selecionando "b" e "d", números que correspondem ao cosseno e a tangente, em Objetos.

    Observação: Se for necessário, use *Mover* para organizar os textos na Janela de Visualização e movimente o ângulo α de modo que os pontos E, F e G não fiquem tão próximos para realizar o passo seguinte.
19. Com a ferramenta *Copiar Estilo Visual*, clique sobre o segmento OC, seno do ângulo, sobre o ponto E, sobre o respectivo texto na Janela de Visualização e pressione a tecla Esc. Selecione novamente a ferramenta e faça o mesmo com o segmento OB, ponto F e texto cosα e, por fim, com o segmento AD, ponto G e texto tgα.
20. Na Janela de Álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre Texto e marque a opção Posição Absoluta na Tela.

    Observação: Se desejar, aumente o tamanho dos textos já selecionados no atalho da Janela de Visualização ou clicando novamente com o botão direito do mouse sobre Texto, Propriedades, Texto.

21. Usando *Mover,* selecione os pontos E, F e G na Janela de Álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre eles e marque a opção Habilitar Rastro.
22. Por fim, feche a Janela de Álgebra e, para criar os gráficos, movimente o controle deslizante α usando *Mover* ou clique sobre ele com o botão direito do mouse e selecione a opção Animar.

    Observação: Para apagar o rastro, basta movimentar a Janela de Visualização.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/Z_icR2HRj34

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) O que você observa sobre os valores de seno, cosseno e tangente de α quando este ângulo está situado no primeiro quadrante? E no segundo? E no terceiro? E no quarto?
2) Quando o valor do seno é negativo, qual é o comportamento de seu gráfico? E do cosseno? E da tangente?
3) O que você conclui sobre os valores do seno e do cosseno de 30°, 150°, 210° e 330°? E em relação aos ângulos de

60°, 120°, 240° e 300°? Se for necessário, dê dois cliques sobre α usando Mover e altere o incremento para 10°.

4) O que você conclui sobre as relações entre os valores de seno e cosseno de α, 180° - α, 180° + α, 360° - α?

30. DESLOCAMENTO DE POLÍGONO E CONSTRUÇÃO DE MATRIZES COM COORDENADAS DE VÉRTICES

Atividade baseada no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014l).

Objetivo: Possibilitar o estudo da translação de polígonos no plano cartesiano e de coordenadas cartesianas com a representação em matrizes pelos alunos.

Habilidade da BNCC associada:

"(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica" (BRASIL, 2018, p. 315).

Roteiro de Construção

1. Selecione *Controle Deslizante* e crie dois controles:
    - Nome: "horizontal", min: "-10", max: "10", Incremento: "1";
    - Nome: "vertical", min: "-10", max: "10", Incremento: "1".

2. No campo Entrada, insira os seguintes pontos que dependem dos controles criados no passo anterior:
   - "A=(1+horizontal,1+vertical)";
   - "B=(1+horizontal,3+vertical)";
   - "C=(3+horizontal,1+vertical)";
   - "D=(2+horizontal,0+vertical)".

   Observação: Não é necessário digitar o nome do ponto. Basta inserir as coordenadas acima na respectiva ordem. Exemplo: "(1+horizontal,1+vertical)".
3. Insira os pontos E=(6,3), F=(6,5), G=(8,3) e H=(7,2) usando a malha, clicando sobre essas coordenadas, respectivamente, com a ferramenta *Ponto* ou digitando no campo Entrada.
4. Selecione *Polígono* e clique nos pontos A, B, C, D e A, e sobre os pontos E, F, G, H e E.
5. Movimente os controles e observe o deslocamento.
6. Para inserir uma matriz A_{4x2} com as coordenadas dos vértices, clique em Exibir, Planilha.
7. Digite as coordenas x dos pontos na primeira coluna e as coordenas y dos pontos na segunda coluna da seguinte maneira:

"x(A)"	"y(A)"
"x(B)"	"y(B)"
"x(C)"	"y(C)"
"x(D)"	"y(D)"

8. Selecione as células, clique com o botão direito do mouse, Criar, Matriz.

   Observação: Use *Mover* para movimentar os controles.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/0bSz-AMlQBc

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) "Quantas unidades na horizontal e quantas unidades na vertical do polígono ABCD devem ser deslocadas para que, ao final, coincidam com o polígono EFGH?" (SÃO PAULO, 2014l, p. 58).
2) Altere os controles horizontal e vertical para 1. Movimente a figura ABCD, de modo que ela fique totalmente no 3° quadrante, com vértice C sobre o eixo y. Qual foi o deslocamento dessa figura? Quais as coordenadas dos vértices?
3) Crie os seguintes pontos no GeoGebra: (0,0), (4,0), (4,4) e (0,4). Que figura geométrica foi formada? Qual a sua área?
4) Se a figura construída no item 1 for deslocada duas unidades positivas na abscissa e duas negativas na ordenada, os vértices dessa figura se encontrarão em quais pontos?

31. CONE E CILINDRO DE REVOLUÇÃO

Objetivo: Oportunizar aos alunos o estudo de dois sólidos de revolução, em particular, o cilindro e o cone.

Habilidades da BNCC associadas:

"(EF03MA14) Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações" (BRASIL, 2018, p. 287).

"(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros" (BRASIL, 2018, p. 309).

Roteiro de Construção

1. Feche a Janela de Álgebra e oculte os eixos na Janela de Visualização.
2. Crie um *Vetor* vertical usando os pontos da malha.
3. Crie uma *Elipse* ao lado do vetor, inserindo os focos preferencialmente na linha horizontal que contém a origem dele. Será criado também um ponto sobre a elipse.
4. Selecione *Ponto Médio ou Centro* e clique sobre os focos.

5. Esconda os focos e o ponto sobre a elipse, clicando com o botão direito do mouse sobre eles, desmarcando a opção Exibir Objeto.
6. Usando *Ponto em Objeto*, crie um ponto sobre a elipse.
7. Com a ferramenta *Translação por um Vetor*, clique na elipse e depois no vetor. Clique no centro da elipse e novamente no vetor, e translade também o ponto sobre ela.
8. Com a ferramenta *Polígono*, uma os pontos da elipse original com os pontos transladados para formar um retângulo que será rotacionado.
9. Clique com o botão direito do mouse sobre esse polígono e marque a opção Habilitar rastro.
10. Use *Mover* para movimentar o ponto criado sobre a elipse original e movimente a Janela de Visualização para apagar o rastro. Se desejar, altere a cor do polígono.

Cone

11. Crie uma *Elipse* de forma análoga ao que foi feito no cilindro, e, antes de esconder todos os pontos, encontre também o ponto médio entre os vértices com a ferramenta *Ponto Médio ou Centro*.
12. Esconda os pontos criados, exceto o ponto médio.
13. Com a ferramenta *Ponto em Objeto*, crie um ponto sobre a elipse.
14. Com a ferramenta *Translação por um Vetor*, clique no centro e no vetor (o mesmo usado no cilindro).
15. Com a ferramenta *Polígono*, crie um triângulo que tenha como vértices o centro transladado, o centro da elipse original e ponto sobre ela, criados para a construção do cone.

16. Clique com o botão direito do mouse sobre esse polígono e marque a opção Habilitar Rastro.
17. Use *Mover* para movimentar o ponto criado sobre a elipse original e movimente a Janela de Visualização para apagar o rastro. Se desejar, altere a cor do polígono.

Eixo de rotação

18. Selecione *Reta*, clique sobre os centros que estão na construção do cilindro e sobre os centros que estão na construção do cone e altere o estilo das duas retas para tracejado. Faça isso pelo atalho na Janela de Visualização ou clicando sobre elas com o botão direito do mouse, Propriedades, na aba Estilo.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/tYO_SsilEek

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Que figura plana que dá origem ao cilindro quando a movimentamos em torno de um eixo?
2) Qual figura plana dá origem ao cone quando fazemos esse mesmo movimento?

32. SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Atividade baseada no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014m).

Objetivo: Proporcionar aos alunos a investigação de figuras geométricas que constituem sólidos de revolução.

Habilidades da BNCC associadas:

"(EF03MA14) Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações" (BRASIL, 2018, p. 287).

"(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais" (BRASIL, 2018, p. 303).

Roteiro de Construção

1. Selecione Círculo dados Centro e Raio, clique na origem do plano cartesiano e defina raio 2.
   Observação: O tamanho do raio é opcional.
2. Clique em Exibir, Janela de Visualização 3D para exibi-la e feche a Janela de Visualização.
3. Selecione *Ponto* e insira um ponto B sobre a circunferência, fora dos eixos, e um ponto C sobre o eixo z.

4. Selecione *Plano por três pontos* e clique sobre os pontos B, A e C.
5. Clique com o botão direito do mouse sobre o plano, na Janela de Visualização 3D ou na Janela de Álgebra, Propriedades e, na aba Estilo, altere a espessura da linha para 2.
6. Selecione *Polígono* e, usando a malha do plano se desejar, construa o polígono que deseja revolucionar.
   Observação: Para facilitar, mova o ponto B até que ele fique sobre o eixo x ou y.
7. Oculte o plano que contém o polígono, desmarcando-o na Janela de Álgebra.
8. Na Janela de Álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre *Ponto*, desmarque a opção Exibir Objeto e marque apenas o ponto B para exibi-lo.
9. Clique com o botão direito do mouse sobre o polígono e marque a opção Habilitar Rastro.
10. Mova o ponto B. Movimente também a Janela de Visualização 3D para observar o sólido formado. Se desejar, oculte os eixos e o plano.
    Observações:
    - Para apagar o rastro, basta clicar em desfazer.
    - Se desejar criar outro polígono para formar um novo sólido, marque o plano na Janela de Álgebra, desmarque o polígono antigo e use a ferramenta *Polígono* para criar uma nova figura.

A construção também está disponibilizada neste vídeo:

https://youtu.be/794Ggabd1B8

Sugestões de questões a serem exploradas a partir da atividade:

1) Crie uma figura geométrica sobre o plano exibido com os seguintes vértices: (0,3), (1,3), (1,5), (3,5), (3,6), (1,6), (1,7), (3,7), (3,8) e (0,8). Qual letra do alfabeto foi criada?
2) Qual o perímetro dessa figura? Considere 1 cm a unidade de medida.
3) Rotacione a figura geométrica e verifique qual sólido de revolução ela forma.

ALGUMAS REFLEXÕES FINAIS

Ao compartilharmos esse e-book com a comunidade de professores que ensinam Matemática, esperamos que essas propostas de atividades sejam pauta de debate entre professores atuantes na Educação Básica, no Ensino Superior e licenciandos em Matemática, para serem analisadas e adaptadas para cada contexto escolar, mobilizando o uso de tecnologias digitais na Educação Básica.

Como já mencionado anteriormente, essas propostas foram delineadas por pesquisadores vinculados ao projeto "Mapeamento do uso de tecnologias da informação nas aulas de Matemática no Estado de São Paulo" e, em seguida, foram analisadas, refinadas e roteirizadas por meio de vídeos digitais, produzidos pela primeira autora dessa obra. Uma das principais preocupações nesse segundo momento de análise das propostas foi em adequá-las de modo a atenderem habilidades preconizadas pela BNCC acerca do ensino de Matemática.

Isso se deu porque, embora cada estado tenha seu próprio programa curricular, deve haver consonância entre o que consta nesses currículos e o que é recomendado pela BNCC. Com isso, esperamos aproximar o máximo possível o que consideramos fundamental em abordagens com tecnologias digitais para o ensino de Matemática - que é o fomento da conjectura, da simulação e das múltiplas representações que articulam instantaneamente os campos da Álgebra, Geometria e Aritmética

– do que de fato deve ser desenvolvido em sala de aula, de acordo com os documentos oficiais.

Cabe destacar, ainda, que essas propostas já adentraram as salas de aula, por meio dos trabalhos de campo realizados em cada pesquisa, depois por meio de cursos de extensão em eventos, e, em demais ocasiões. Portanto, consideramos importante refletir também sobre apontamentos que emergiram nessas ocasiões, pois esses nos permitem avançar na discussão sobre o uso de tecnologias na Educação Básica.

Um desses apontamentos é a dificuldade de trabalhar com as tecnologias devido às condições, por vezes precárias, para que esse uso seja possível, sobretudo nas escolas públicas, conforme discutido em Javaroni e Zampieri (2018; 2019). Essa precariedade ficou ainda mais evidente devido à pandemia do Coronavírus, que obrigou gestores, professores, alunos e responsáveis pelos alunos a se reinventarem para poderem manter o mínimo de vínculo possível com a escola.

A nossa preocupação, além das questões de saúde pública relacionadas a um retorno seguro às aulas presenciais, é como essa discussão sobre o uso das tecnologias digitais se dará daqui para frente, uma vez que ficou evidente sua importância no momento de pandemia, sobretudo das tecnologias que viabilizam a comunicação a distância.

Por fim, buscando estender essa inquietação, mas longe de esgotar a discussão, uma vez que a primeira edição desse livro é datada no período da pandemia (2021), vamos propor três questões que podem pautar eventuais debates sobre essa temática, restritas ao conteúdo dessa obra literária:

- Que outras tecnologias ou abordagens metodológicas poderiam ser associadas a essas propostas aqui apresentadas, para serem aplicadas em um momento pós-pandemia?

- Que adaptações seriam necessárias para atender a um ensino híbrido ou remoto emergencial?
- Como que as tecnologias que viabilizam a comunicação a distância poderiam contribuir com essas adaptações?

Boas reflexões!

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 19 jul. 2021.

CHINELLATO, T. G. **Formação continuada de professores com o uso de Tecnologias Digitais:** produção de atividades de conteúdos matemáticos a partir do currículo paulista. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2019. Disponível em <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/191183>.

CHINELLATO, T. G. **O uso do computador em escolas públicas estaduais da cidade de Limeira/SP.** 2014. 104 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho," Rio Claro, 2014.

GEOGEBRA. **GeoGebra - Aplicativos Matemáticos**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 19 jul. 2021.

JAVARONI, S. L.; ZAMPIERI, M. T. **Tecnologias digitais nas aulas de Matemática:** um panorama acerca das escolas públicas do Estado de São Paulo. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2018. v. 1. 109p.

JAVARONI, S. L.; ZAMPIERI, M. T. **Tecnologias digitais nas aulas de Matemática:** um panorama acerca das escolas públicas do Estado de São Paulo. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2019. v. 1. 109p.

OLIVEIRA, F. T. de. **A inviabilidade do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação no contexto escolar**: o que contam os professores de matemática?. 2014. 169f. Dissertação-(mestrado) -Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/127664>.

PERALTA, P. F. 2015**. Utilização das Tecnologias Digitais por professores de Matemática:** um olhar para a região de São José do Rio Preto. 2015. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2015.

SANTOS, L. dos; JAVARONI, S. L. Atividades matemáticas com GeoGebra e a produção de material didático digital para o professor que ensina Matemática: desdobramentos de contextos formativos. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 5, p. 71-89, 2020.

SÃO PAULO (Estado). **Caderno do Aluno**. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Matemática. São Paulo: IMESP, 2014a. Disponível em: <https://www.educacao.sp.gov.br/caderno-aluno>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SÃO PAULO (Estado). **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas tecnologias. Secretaria da Educação; - 1. ed. atual. - São Paulo, 2012. Disponível em <http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/783.pdf>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SÃO PAULO. **Caderno do Aluno**. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Matemática. 2ª série Ensino Médio. São Paulo: IMESP, 2v., 2014b, p. 60-69.

SÃO PAULO. **Caderno do Aluno**. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Matemática. 6ª série/7º ano. São Paulo: IMESP, 2014c, 2v., p. 33-36.

SÃO PAULO. **Caderno do Aluno**. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Matemática. 7ª série/ 8º ano. São Paulo: IMESP, 2014d, 2v., p. 48-49.

SÃO PAULO. **Caderno do Aluno**. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Matemática. 6ª série/ 7º ano. São Paulo: IMESP, 2014e, 1v., p. 77-78.

SÃO PAULO. **Caderno do Aluno**. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Matemática. 6ª série/7º ano. São Paulo: IMESP, 2014f, 1v., p. 79-80.

SÃO PAULO. **Caderno do Aluno**. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Matemática. 8ª série/9º ano. São Paulo: IMESP, 2014g, 2v., p. 07.

SÃO PAULO. **Caderno do Aluno**. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Matemática. 8ª série/9º ano. São Paulo: IMESP, 2014h, 1v., p. 89-92.

SÃO PAULO. **Caderno do Aluno**. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Matemática. 1ª série do Ensino Médio. São Paulo: IMESP, 2014i, 1v., p. 52-53.

SÃO PAULO. **Caderno do Aluno**. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Matemática. 1ª série do Ensino Médio. São Paulo: IMESP, 2014j, 2v., p. 42.

SÃO PAULO. **Caderno do Aluno**. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Matemática. 1ª série do Ensino Médio. São Paulo: IMESP, 2014k, 2v., p. 85.

SÃO PAULO. **Caderno do Aluno**. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Matemática. 2ª série do Ensino Médio. São Paulo: IMESP, 2014l, 1v., p. 58-59.

SÃO PAULO. **Caderno do Aluno**. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Matemática. 2ª série do Ensino Médio. São Paulo: IMESP, 2014m, 2v., p. 56.

SOUZA, L. B. **Tecnologias digitais na educação básica:** um retrato de aspectos evidenciados por professores de matemática em formação continuada. 2016. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2016.

ZAMPIERI, M. T. **Ações colaborativas de formação continuada de educadores matemáticos:** saberes constituídos e mobilizados. 2018.280p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2018.